F 特異点論の最近の進展について

高木 俊輔（東京大学）*

1　はじめに

昨年，日本大学の渡辺敬一先生と共著で雑誌『数学』に F 特異点の解説記事 [17] を書かせて頂いたが[1]，紙面の都合上，限られた話題にしか触れることができなかった．そこでこの小文では，[17] で触れることのできなかった話題を幾つか取り上げる．説明の都合上，[17] と重複する部分もあるが，ご寛恕頂きたい．

以下，環と言えば常に単位元を持つ可換ネーター環を意味するものとする．

2　F 純・強 F 正則環

F 特異点と呼ばれる特異点のクラスは，強 F 正則環，弱 F 正則環，F 有理環，F 純環，F 単射環，F 冪零環，有限 F 表現型の環など多岐にわたるが，この小文では主に F 純環と強 F 正則環を扱う（最後の節で有限 F 表現型の環についても触れる）.

R を素数標数 p の環とし，簡単のため R は整域であると仮定する．このとき，$\overline{Q(R)}$ を R の商体 $Q(R)$ の代数閉包とし，$R^{1/p^e} := \{x \in \overline{Q(R)} \mid x^{p^e} \in R\}$ とおく．環同型 $R^{1/p^e} \cong R \;\; x \mapsto x^{p^e}$ により，R の e 回 Frobenius 写像

$$F^e : R \to R \quad r \mapsto r^{p^e}$$

を包含写像 $R \hookrightarrow R^{1/p^e}$ と同一視する．F^e は R 準同型ではないが，$R \hookrightarrow R^{1/p^e}$ は R 準同型であることに注意する．$R \hookrightarrow R^{1/p}$ によって $R^{1/p}$ を R 加群と見る．$R^{1/p}$ が有限生成 R 加群であるとき，R は F **有限** (F-finite) であると言う．例えば，標数 $p > 0$ の完全体上本質的有限生成な環，剰余体が完全体であるような素数標数の完備局所環などは F 有限である．F 有限ならば優秀環であることが知られている ([7]).

まず F 純環・強 F 正則環の定義を復習する．

定義 2.1. R を標数 $p > 0$ の F 有限な整域とする．

* *E-mail:* `stakagi@ms.u-tokyo.ac.jp`

[1] 日本語版 [17] の誤植を英語版 [18] で修正したので，そちらも合わせてご覧頂きたい．

(i) $R \hookrightarrow R^{1/p}$ が R 準同型として分裂するとき，つまり R 準同型 $\varphi : R^{1/p} \to R$ が存在して合成写像 $R \hookrightarrow R^{1/p^e} \xrightarrow{\varphi} R$ が恒等写像になるとき，R は F **純** (F-pure) 環であると言う．

(ii) 任意の非零元 $c \in R$ に対し，ある $e \in \mathbb{N}$ が存在して，合成写像

$$R \hookrightarrow R^{1/p^e} \xrightarrow{\times c^{1/p^e}} R^{1/p^e} \quad r \mapsto r \mapsto c^{1/p^e} r$$

が R 準同型として分裂するとき，R は**強 F 正則** (strongly F-regular) 環であると言う．

F 有限環について次のような関係がある．

$$\text{正則} \Longrightarrow \text{強}\, F\, \text{正則} \Longrightarrow F\, \text{純}$$

F 純環・強 F 正則環の例については，[18, Exmaples 3.3, 3.8, 3.16] を参照されたい．

定義 2.2. R を完全体上本質的有限生成な $\mathbb{Q}$-Gorenstein 整閉整域とする．Y が正規スキームであるような固有双有理射 $\pi : Y \to X := \operatorname{Spec} R$ が与えられたとき，X, Y の標準因子 K_X, K_Y を比較する．

$$K_Y = f^* K_X + \sum_i a_i E_i \quad (a_i \in \mathbb{Q},\ E_i \text{ は } \pi \text{ の例外素因子})$$

任意の π と任意の i に対し $a_i > -1$ (resp. $a_i \geq -1$, $a_i \geq 0$) が成り立つとき，X は高々**対数的端末特異点** (resp. **対数的標準特異点**, **標準特異点**) しか持たないと言う．

強 F 正則環は，次の 3 つの「証拠」から，対数的端末特異点の正標数における類似と見なせる．以下，$R = k[x_1, \ldots, x_n]_{(x_1,\ldots,x_n)}/(f_1, \ldots, f_r)$ は完全体 k 上本質的有限生成な $\mathbb{Q}$-Gorenstein 整閉整域とする．

(1) (原 [3]) k を標数 $p > 5$ の代数閉体とし，$\dim R = 2$ とする．このとき，R が強 F 正則環であることと，$\operatorname{Spec} R$ が高々対数的端末特異点しか持たないことは同値である．

(2) (原 [5], Smith [14], Mehta-Srinivas [10]) k を標数 0 の体とし，R_p を R の標数 $p > 0$ への還元とする[2]．このとき，$\operatorname{Spec} R$ が高々対数的端末特異点しか持たないことと，十分大きい p に対して R_p が強 F 正則であることは同値である[3]．

[2]正確には，$\mathbb{Z}$ 上 f_i 達の係数で生成される k の部分環を A とし，$R_A = A[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_r)$ とおいたとき，自然な射 $X_A \to \operatorname{Spec} A$ の一般の閉ファイバー（の局所化）を X の**標数 $p > 0$ への還元**と言う．f_i が整数係数の多項式ならば，R_p として $\mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]_{(x_1,\ldots,x_n)}/(f_1, \ldots, f_r)$ を考えれば良い．より詳しくは [18, Section 3.3] を参照のこと．

[3]「十分大きい p に対して R_p が」とは，稠密な開集合 $U \subset \operatorname{Spec} A$ が存在して U の各閉点のファイバーが，という意味である．

(3) (Blickle-Schwede-Tucker [1]) 次の 2 条件は同値である．

(a) 任意の分離的かつ正則な alteration $\pi : Y \to X = \mathrm{Spec}\, R$ に対し[4]，
$\mathrm{Tr}_\pi(\pi_*\mathcal{O}_Y(\lceil K_Y - \pi^* K_X \rceil)) = \mathcal{O}_X$ が成り立つ．ただし，Tr_π は π に付随する跡写像である[5]．

(b) $$\begin{cases} \mathrm{Spec}\, R \text{ は高々対数的端末特異点しか持たない} & (k \text{ の標数が零の場合}) \\ R \text{ は強 } F \text{ 正則環である} & (k \text{ の標数が正の場合}). \end{cases}$$

注意 2.3. (3) から (2) は従わない．なぜなら，(3) (a) では全ての分離的かつ正則な alteration を考える必要があり，標数 0 からの還元として得られる alteration を考えるだけでは不十分である．

F 純環も対数的標準特異点の類似であると見なされているが，強 F 正則環と対数的端末特異点の対応に比べると，「証拠」にやや乏しい[6]．

(2') (藤野-高木 [2]) k を標数 0 の代数閉体とし，R を 3 次元以下の孤立特異点とする．R_p を R の標数 $p > 0$ への還元とすると，$\mathrm{Spec}\, R$ が高々対数的標準特異点しか持たないことと，無限個の p に対して R_p が F 純であることは同値である[7]．

3 F 特異点の長所・短所

この節では，F 特異点の長所・短所を列挙する．3.1〜3.3 は長所，3.4 は短所と考えられる．

3.1 Cohen-Macaulay 性

標数 0 の対数的端末特異点は必ず Cohen-Macaulay であるが，正標数では Cohen-Macaulay ではない対数的端末特異点の例が知られている．実際，[9] で 6 次元の非特異 Fano 多様体で小平の消滅定理が成り立たない例が構成されているので，その affine 錐を考えれば，Cohen-Macaulay ではない孤立対数的端末特異点が得られる．その一方で，強 F 正則環については次が成り立つ．

命題 3.1. 強 F 正則環は Cohen-Macaulay である．

命題 3.1 は通常，密着閉包のコロン捕捉という性質を用いて示されるが，ここでは Frobenius 写像の分裂を用いた証明を与える．

---

[4] つまり $\pi : Y \to X$ は，X が正則スキームであるような，分離かつ広義有限な固有全射である．

[5] 跡写像の定義については，例えば，[18, Theorem 3.20] の直前の段落を参照されたい．

[6] F 純環は対数的標準特異点と類似の性質を満たすことが知られている (詳しくは [18, Section 4] 参照)．そのような「状況証拠」は多くある．

[7] 「無限個の p に対して R_p が」とは，閉点からなる稠密な部分集合 $U \subset \mathrm{Spec}\, A$ が存在して U の各閉点のファイバーが，という意味である．

命題 3.1 の証明．$(R,\mathfrak{m})$ を標数 $p>0$ の d 次元強 F 正則局所整域とし，R が Cohen-Macaulay 環であることを示す．R は優秀環なので，$\operatorname{Spec} R$ の非 Cohen-Macaulay 集合 W は Zariski 閉集合であることに注意する．W の生成点で局所化することにより，$\mathfrak{m}$ 以外の任意の素イデアル $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{m}$ に対し $R_\mathfrak{p}$ は Cohen-Macaulay であると仮定してよい．このとき，任意の $i<d$ に対し $H^i_\mathfrak{m}(R)$ は有限生成 R 加群なので，任意の $i<d$ に対し $c\cdot H^i_\mathfrak{m}(R)=0$ となる非零元 $c\in R$ がとれる．R は強 F 正則なので，ある $e\in\mathbb{N}$ が存在して，R 準同型の合成写像 $R\hookrightarrow R^{1/p^e}\xrightarrow{\times c^{1/p^e}}R^{1/p^e}$ は分裂する．よって，この合成写像が誘導する局所コホモロジー加群の間の写像

$$H^i_\mathfrak{m}(R)\to H^i_\mathfrak{m}(R^{1/p^e})\xrightarrow{\times c^{1/p^e}}H^i_\mathfrak{m}(R^{1/p^e})$$

は単射である．c の定義から任意の $i<d$ に対し $H^i_\mathfrak{m}(R^{1/p^e})\xrightarrow{\times c^{1/p^e}}H^i_\mathfrak{m}(R^{1/p^e})$ は零写像なので，上の単射性から任意の $i<d$ に対し $H^i_\mathfrak{m}(R)=0$ が成り立つ．すなわち，R は Cohen-Macaulay 環である．$\square$

3.2 Bertini の定理

Bertini の定理は標数 0 の特異点を調べる上で基本的かつ重要な定理の 1 つである．例えば，標数 0 の代数閉体上定義された準射影多様体 X が高々標準特異点しか持たないとき，X の一般の超平面切断 H も高々標準特異点しか持たないことが，Bertini の定理の帰結として示される．

正標数では，一般に Bertini の定理は成り立たないため，同じ命題が成り立つかどうかは分かっていない，現在のところ X が 3 次元の場合ですら未解決である[8]．それに対し，F 特異点については類似の主張が成り立つ．

定理 3.2 (Schwede-Zhang [11])**.** X を標数 $p>0$ の代数閉体 k 上定義された準射影多様体とし，H を X の一般の超平面切断とする．X が高々F 純 (resp. 強 F 正則) 特異点しか持たないならば，H も高々F 純 (resp. 強 F 正則) 特異点しか持たない[9]．

3.3 taut 性

k を代数閉体とし，$(R,\mathfrak{m},k)$ を k 上本質的有限生成な 2 次元正規局所環とする．$\pi: Y\to X=\operatorname{Spec} R$ を極小対数的特異点解消とし，$E=\bigcup_i E_i$ を π の例外集合とする．π の定義から，E は単純正規交叉因子である．このとき，次のようにして R の重み付きグラフ Γ_R を定義する．

(1) 各 E_i にグラフの頂点 v_i を対応させ，v_i には 2 つの重み E_i^2 (E_i の自己交点数) と $g(E_i)$ (曲線 E_i の種数) を付す．

(2) 頂点 v_i と v_j を $E_i\cap E_j$ 本の辺で結ぶ．

---

[8]講演中に説明した 3 次元の場合の証明には gap がありました．ここでお詫び致します．

[9]代数多様体 Z が高々F 純 (resp. 強 F 正則) 特異点しか持たないとは，Z の各局所環が F 純 (resp. 強 F 正則) 環であるという意味である．

$(R, \mathfrak{m}, k)$ が **taut** であるとは，次の条件を満たすときに言う: k 上本質的有限生成な 2 次元正規局所環 $(S, \mathfrak{n}, k)$ の重み付きグラフ Γ_S が重み付きグラフとして Γ_R と同型ならば，R の完備化と S の完備化は環同型である．

定理 3.3 (Laufer [8])**.** $k = \mathbb{C}$ のとき，2 次元対数的端末特異点は taut である．

一方，正標数では 2 次元対数的端末特異点は taut とは限らない．例えば k を標数 2 の代数閉体とすると，$k[x,y,z]/(x^2+y^3+z^5)$ と $k[x,y,z]/(x^2+y^3+z^5)$ は共に (E_8) 型特異点だが，完備化しても同型にはならない．実は，これらの特異点は強 F 正則環ではない．強 F 正則環に注目すると次が成り立つ．

定理 3.4 (田中 [19])**.** k を正標数の代数閉体とするとき，2 次元強 F 正則局所環は taut である．

3.4 正規化

k を標数 2 の完全体とし，$R = k[x,y,z]/(x^2z+y^2)$ とおく．$R \cong k[u, uv, v^2] \subset k[u,v]$ より，R の正規化 R^{N} は $k[u,v]$ と同一視できる．このとき，R の導手イデアル $\mathfrak{c} := (R :_{Q(R)} R^{\mathrm{N}})$ は uR^{N} である．双有理幾何学の哲学に従うと，

$$(R^{\mathrm{N}}, \mathfrak{c}) \text{ の特異点} = R \text{ の特異点}$$

が成り立って欲しい．

まず F 純環の概念は，環と単項イデアルの対に対して拡張できる．A を標数 $p > 0$ の F 有限な整域とし，$\mathfrak{a} = (f) \neq (0)$ を A の単項イデアルとしたとき，対 $(A, \mathfrak{a})$ が F **純**であるとは， 任意の $e \in \mathbb{N}$ に対し，合成写像

$$A \hookrightarrow A^{1/p^e} \xrightarrow{\times f^{(p^e-1)/p^e}} A^{1/p^e} \quad a \mapsto a \mapsto f^{(p^e-1)/p^e}a$$

が A 準同型として分裂することと定義する．これが自然な定義であることは，[18, Section 4] を見て欲しい．この定義を上の状況に当てはめると，対 $(R^{\mathrm{N}}, \mathfrak{c})$ は F 純だが，R は F 純環ではないことが分かる (証明は [18, Example 4.18] 参照)．このように，F 特異点は正規化に関して病的な振る舞いをすることがある．

4 R^{1/p^e} の分解

$(R, \mathfrak{m})$ を標数 $p > 0$ の F 有限な d 次元局所整域とし，剰余体 $R/\mathfrak{m}$ は完全体であると仮定する．強 F 正則性・F 純性は，R^{1/p^e} の R 加群としての分解を用いて特徴付けることができる．任意の $e \in \mathbb{N}$ に対し，

$$R^{1/p^e} \cong R^{\oplus a_e} \oplus M_e \quad (a_e \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ M_e \text{ は } R^{1/p^e} \text{ の非自由部分})$$

を R^{1/p^e} の R 加群としての分解とする．

定義 4.1 (Huneke-Leuschke [4]). 上の状況で，R の F **符号** (F-signature) $s(R)$ を次のように定義する:

$$s(R) = \lim_{e\to\infty} \frac{a_e}{p^{de}}.$$

この極限は常に存在するか？という問題は10年近く未解決であったが，最近 Kevin Tucker [20] によって肯定的に解決された.

$s(R)$ は R の特異性を測る尺度と見なせる．正則性・強 F 正則性は，F 符号 $s(R)$ を用いて特徴付けられる.

命題 4.2 ([4]). (1) 次の3条件は同値である.

(a) R は F 純環である.

(b) ある $e \in \mathbb{N}$ が存在して，$a_e > 0$.

(c) 任意の $e \in \mathbb{N}$ に対して，$a_e > 0$.

(2) R が強 F 正則環であることと，$s(R) > 0$ は同値である.

(3) $1 \geq s(R) \geq 0$ であり，R が正則であることと $s(R) = 1$ は同値である.

R^{1/p^e} の R 加群としての分解を用いて定義される概念としては，有限 F 表現型と呼ばれる F 特異点のクラスがある.

定義 4.3 (Smith-van den Bergh [15]). $(R, \mathfrak{m})$ は標数 $p > 0$ の完全体上定義された次数付整域か，もしくは剰余体 $R/\mathfrak{m}$ が完全体であるような標数 $p > 0$ の完備局所整域とする．R が**有限 F 表現型** (finite F-representation type) であるとは，有限個の有限生成 R 加群 $M_1, \dots, M_s$ が存在して，次の条件を満たすときに言う: 任意の $e \in \mathbb{N}$ に対し，非負整数 $b_1^{(e)}, \dots, b_r^{(e)}$ が存在して，R 同型

$$R^{1/p^e} \cong M_1^{\oplus b_1^{(e)}} \oplus \cdots \oplus M_r^{\oplus b_r^{(e)}}$$

が存在する．このとき各 $i = 1, \dots, s$ に対し，$\lim_{e\to\infty} b_i^{(e)}/p^{de}$ が存在し，有理数になることが知られている ([21]).

定義より，有限 F 表現型の環は種々の有限性を満たす．R が正則局所環ならば，Kunz の定理より R^{1/p^e} は自由 R 加群なので，特に R は有限 F 表現型である．故に有限 F 表現型の環は特異点のクラスと見なせるが，$\lim_{e\to\infty} b_i^{(e)}/p^{de}$ がどのような意味を持つ不変量なのかはまだ分かっていない.

例 4.4. k を標数 $p > 0$ の代数閉体とする.

(1) ([15], [6]) $S = k[x_1, \dots, x_d]$ を k 上の多項式環とし，S に $GL_n(k)$ の有限部分群 G が作用しているとする．G は擬鏡映を持たず，G の位数は p で割り切れないと仮

定する．このとき不変式環 $R := S^G$ は有限 F 表現型である．橋本-中嶋 [6] は，この R について定義 4.3 の不変量 $\lim_{e\to\infty} b_i^{(e)}/p^{de}$ を計算し，

$$\lim_{e\to\infty} \frac{b_i^{(e)}}{p^{de}} = \frac{\mathrm{rank}_R M_i}{|G|}$$

が成り立つことを証明した．

(2) ([13], [16]) $k[s,t,u,v,w,x,y,z]/(su^2x^2 + sv^2y^2 + tuxvy + tw^2z^2)$ は強 F 正則環（さらには UFD）であるが，有限 F 表現型ではない．

一般に，与えられた環が有限 F 表現型かどうか判定することは難しい．k を標数 $p > 0$ の完全体とし，$R = k[x,y,z]/(x^2 + y^3 + z^7)$ とする．$p = 2, 3, 7$ の場合は，渋田 [12] によって R が有限 F 表現型であることが示されている．$p \neq 2, 3, 7$ の場合は，R は有限 F 表現型ではないと予想されているが，現在のところ未解決である．

参考文献

[1] M. Blickle, K. Schwede, K. Tucker, F-singularities via alterations, to appear in Amer. J. Math.

[2] O. Fujino and S. Takagi, On the F-purity of isolated log canonical singularities, Compositio Math. **149** (2013), no.9, 1495–1510.

[3] N. Hara, Classification of two-dimensional F-regular and F-pure singularities, Adv. Math. **133** (1998), 33–53.

[4] C. Huneke and G. Leuschke, Two theorems about maximal Cohen-Macaulay modules, Math. Ann. **324** (2002), 391–404.

[5] N. Hara, A characterization of rational singularities in terms of injectivity of Frobenius map, Amer. J. Math. **120** (1998), 981–996.

[6] M. Hashimoto and Y. Nakajima, Generalized F-signature of invariant subrings, arXIv:1311.5963, preprint.

[7] E. Kunz, On Noetherian rings of characteristic p, Amer. J. Math. **98** (1976), 999–1013.

[8] H. B. Laufer, Taut two-dimensional singularities. Math. Ann. **205** (1973), 131–164.

[9] N. Lauritzen and A. P. Rao, Elementary counterexamples to Kodaira vanishing in prime characteristic, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), Vol.107, No.1, February 1997, pp. 21–25.

[10] V. B. Mehta and V. Srinivas, A characterization of rational singularities. Asian. J. Math. **1** (1997), 249–278.

[11] K. Schwede and W. Zhang, Bertini theorems for F-singularities, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **107** (2013), no. 4, 851–874.

[12] T. Shibuta, One-dimensional rings of finite F-representation type, J. Algebra **332** (2011), 434–441.

[13] A. Singh and I. Swanson, Associated primes of local cohomology modules and of Frobenius powers, Int. Math. Res. Not. **33** (2004),1703–1733.

[14] K. E. Smith, F-rational rings have rational singularities, Amer. J. Math. **119** (1997), no. 1, 159–180.

[15] K. E. Smith and M. Van den Bergh, Simplicity of rings of differential operators in prime characteristic, Proc. London Math. Soc. (3) **75** (1997), no. 1, 32–62.

[16] S. Takagi and R. Takahashi, D-modules over rings with finite F-representation type, Math. Res. Lett. **15** (2008), no.3, 563–581.

[17] 高木俊輔, 渡辺敬一, “F 特異点 –正標数の手法の特異点論への応用–”, 日本数学会『数学』, **66** (2014), no.1, 1–30.

[18] S. Takagi and K.-i. Watanabe, F-singularities: applications of characteristic p methods to singularity theory, arXiv:1409.3473, to appear in Sugaku Expositions.

[19] 田中悠樹, 修士論文, 東京大学, 準備中.

[20] K. Tucker, F-signature exists, Invent. math. **190** (2012), 743–765.

[21] Y. Yao, Modules with finite F-representation type, J. London Math. Soc. (2) **72** (2005), no. 1, 53–72.