函数体に於ける周期について

田口　雄一郎　（九大数理）

1　序

ここに言ふ周期 (period) とは、典型的には指数函数 e^z の周期 $2\pi i$ や楕円函数等超越的な周期函数の周期の事で、さらに Γ 函数や ζ 函数の特殊値等も念頭に置いてゐる。近年これらの値の函数体類似[1]（即ち $\mathbb{F}_q(\theta)$-類似）に関する研究に於いて著しい発展があり、古典的な場合（即ち有理数体上の場合）には現状では手が届きさうもないと思はれてゐる様な予想に対応する事実も次々と証明されつつある。本稿ではそれらの結果の概要を解説し、その証明について多少なりともその雰囲気をお伝へしたい。なほ、函数体の多重ゼータ値については [11] や [20] にも明快な概説があるので参照されたい。

謝辞. このテーマについて「代数学シンポジウム」で講演する機会を下さつた落合理さんを始め関係の皆様に感謝致します。また、三柴善範さんには彼の結果を説明して頂いたばかりでなく、論文の TEX ファイルから幾つかの数式をそのまま copy & past させて頂きました。ここに記して感謝致します。

＊　　＊　　＊

最初に記号の設定を兼ねて「代数体と函数体の類似」の復習をしよう。以下で $\mathbb{F}_q$ は q 元体とし、その標数を p とする。次の類似は良く知られてゐる：

代数体	函数体
$\mathbb{Z}$（係数環）	$\mathbb{A}=\mathbb{F}_q[t]$
$\mathbb{Z}$（基礎環）	$A=\mathbb{F}_q[\theta]$
$\mathbb{Z}_{>0}$	$A_+=\{\text{monic } a\in A\}$
偶数	$q-1$ の倍数
$\mathbb{Q}$	$K=\mathbb{F}_q(\theta)$
$\mathbb{R}$	$K_\infty=\mathbb{F}_q((1/\theta))$
$\mathbb{C}$	$\overline{K}_\infty=(K_\infty$ の代数閉包) 又は
	$\mathbb{C}_\infty=(\overline{K}_\infty$ の $(1/\theta)$-進完備化)
乗法群 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$	Carlitz 加群 C
楕円曲線	Drinfeld 加群
⋮	⋮

[1] [17] の冒頭 (§1.1) では "A *period* is a complex number whose real and imaginary parts are values of absolutely convergent integrals of rational functions with rational coefficients, over domains in $\mathbb{R}^n$ given by polynomials inequalities with rational coefficients." と定義されてゐるが、函数体では積分に依る表示は今の所知られてゐない。

代数体側では係数環としての $\mathbb{Z}$ と基礎環としての $\mathbb{Z}$ を区別出来ない[2] が、函数体側では異なる変数 t と θ を用ゐる事によりこれらを区別してゐる。一般に A-代数 L は $\mathbb{F}_q$-代数準同型 $\mathbb{A} \xrightarrow{\sim} A \to L;\ t \mapsto \theta$ により「$\mathbb{A}$ 上の代数」(＝代数であつて環準同型 $\gamma : \mathbb{A} \to L$ が与へられてゐるもの）と思ふ。

「偶数」の類似が「$q-1$ の倍数」なのは $\#\mathbb{Z}^\times = 2$ であるのに対し $\#\mathbb{A}^\times = q-1$ だからである（この事実は（多重）ゼータ値についての諸々の結果に顕著に見て取れる（cf. 定理 1.1〜1.3, 1.5)）。

上の表の続き（特に Fontaine 理論とその函数体類似）については [16] を参照されたい。

ここで Drinfeld 加群の定義を復習しておく。L を A 上の体とし、$\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ を L 上の加法群概型とする。L 上の階数 r の Drinfeld $\mathbb{A}$-加群[3]（以下単に Drinfeld 加群）とは、環準同型

$$\phi : \mathbb{A} \to \mathrm{End}_L(\mathbb{G}_{\mathrm{a}});\quad a \mapsto \phi_a$$

であつて各 $a \in \mathbb{A} \smallsetminus \{0\}$ に対し $\deg \phi_a = q^{r \deg(a)}$（ここに左辺の deg は概型の有限射としてのそれ、右辺の deg は多項式としてのそれ）であり、かつ ϕ_a は $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ の Lie 環 $\mathrm{Lie}(\mathbb{G}_{\mathrm{a}})$ 上に $\gamma(a)$ 倍写像を引き起こすもの、である。定義から特に ϕ_a は $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ に $\mathbb{F}_q$-lienar に作用する事が分かる。$\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ 上の q 乗 Frobenius を τ と書くと、$\mathbb{F}_q$-linear な射 $\in \mathrm{End}_L(\mathbb{G}_{\mathrm{a}})$ 全体のなす部分環は捻れ多項式環 $L\{\tau\}$ (関係式は $\tau x = x^q \tau$ for $x \in L$) と同型である。環準同型の ϕ でなく、「ϕ による $\mathbb{A}$-作用付きの $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$」を Drinfeld 加群と呼ぶ事もあり、以下ではこれを E 等の記号で表す。Carlitz 加群 C とは、t の作用が

$$\phi_t \;=\; \theta + \tau$$

（即ち $x \mapsto \theta x + x^q$ なる射）で与へられる階数 1 の Drinfeld 加群の事であり、色々な意味でこれが代数体上の理論に於ける乗法群 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ の類似となる。

E を $\overline{K}$ 上の Drinfeld 加群または $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ または楕円曲線とする。どの場合も指数写像 $\exp_E : \mathrm{Lie}E(\mathbb{C}_\infty) \to E(\mathbb{C}_\infty)$ がある（$\overline{\mathbb{Q}}$ 上の場合は $\mathbb{C}_\infty$ を $\mathbb{C}$ と読み替へる)。これは全射である。$\Lambda = \mathrm{Ker}(\exp_E)$ とおく。$E = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ または楕円曲線のとき Λ は階数がそれぞれ 1 または 2 の自由 $\mathbb{Z}$-加群であり、E が階数 r の Drinfeld 加群のとき Λ は階数 r の自由 A-加群である。E の周期とは Λ の元 $\neq 0$ の事である。$E = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ のときの Λ の生成元の一つが $2\pi i$ である。$E = C$ のときの Λ の生成元の一つを Carlitz 基本周期と呼ぶ。これを $\tilde{\pi}$ で表す。$\tilde{\pi}$ は $K_\infty((-\theta)^{1/(q-1)})$ の元である。次の表示が知られてゐる：

$$\tilde{\pi} \;:=\; (-\theta)^{q/(q-1)} \prod_{i=1}^{\infty} (1 - \theta^{1-q^i})^{-1}$$

（これが実際に Carlitz 基本周期である事の証明については例へば [3], Cor. 2.5.8 を参照)。$(2\pi i)^n$ は n の偶奇に従つて $\mathbb{R}$ に入つたり出たりするが、同様

[2] そのため、例へばこれら二つのテンソル積 $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ が 2 次元の対象にならずにどうしても $\mathbb{Z}$ に戻つてしまふ、等の「弊害」がある。

[3]「一般の $\mathbb{A}$」即ち $\mathbb{F}_q$ 上の滑らかかつ固有な代数曲線から一閉点を抜いたものの函数環 $\mathbb{A}$ に対しても Drinfeld $\mathbb{A}$-加群は同様に定義される（がここでは略する)。

に $\tilde{\pi}^n$ も n が $q-1$ で割れるか否かに従つて K_∞ に入つたり出たりする（これが結構証明のポイントになつたりする; §5 参照)。

$\exp_E$ は超越函数であり、的の E は $\overline{\mathbb{Q}}$ 又は $\overline{K}$ 上定義された代数群であるといふ事が、周期の超越性を証明するときに鍵になる（cf. 例へば定理 3.6)。

歴史・定義. 函数体に於ける周期の超越性に関連する研究の歴史を概観し、同時に幾つかの定義も述べる。（時間の都合で、主に（多重）ゼータ値に関するものを紹介する。）

1935 年、Leonard Carlitz [8] は（今の言葉で言ふところの）Carlitz 加群 C, 基本周期 $\tilde{\pi}$, Carlitz ゼータ値

$$\zeta(n) \;=\; \sum_{a\in A_+} \frac{1}{a^n} \;\in K_\infty \qquad (n=1,2,\dots)$$

を定義した。この値は $\neq 0$ である。右辺の和は $n=1$ でも収束する事に注意されたい。

1937 年、Carlitz [9] は階乗函数 $n!$ の函数体類似 (for $n\in\mathbb{Z}_{>0}$) を定義した。後にこの函数は David Goss [15] により $n\in\mathbb{Z}_p$ に拡張された。その定義は、$n\in\mathbb{Z}_p$ を $n=\sum_{i=0}^{\infty} n_i q^i$ と q 進展開し、

$$\Pi_n \;=\; \Gamma_{n+1} \;:=\; \prod_{i=0}^{\infty} D_i^{n_i}$$

とおく（函数 $\Gamma:\mathbb{Z}_p\to K_\infty$ は K の数論的 Γ-函数と呼ばれる)。ここに右辺の D_i は

$$D_i \;:=\; \prod_{j=0}^{i-1}(\theta^{q^i}-\theta^{q^j}).$$

因みにこの「数」は Carlitz 指数函数の展開係数の分母に現れるものである：

$$\exp_C(z) \;=\; \sum_{i=0}^{\infty}\frac{z^{q^i}}{D_i}.$$

Carlitz は同じ論文で ζ の「偶」数点での値についての次の定理を証明した：

定理 1.1. $(q-1)\mid n$ のとき $\zeta(n)/\tilde{\pi}^n\in K$.

1941 年、Carlitz の弟子の Luther I. Wade は $\tilde{\pi}$ の（従つて ζ の「偶」数点での値の）超越性を証明した。

1974 年、Vladimir Drinfeld [14] は Drinfeld 加群を定義した（彼自身は「楕円加群」elliptic module と呼んだ)。

1986 年、Jing Yu [29] は Drinfeld 加群の周期の超越性を証明した。これは楕円曲線の周期の超越性に関する Schneider-Lang の定理 ([5], §2.3) の類似である。

1991 年、Dinesh Thakur [25] は函数体の Γ 函数を（「一般の $\mathbb{A}$」に対して）二種類定義し、その数論的性質を色々と調べた（函数等式、乗法公式、特殊値、$\cdots$）。「二種類」といふのは、一つは変数が標数 0 で値が正標数のもの (数論的 Γ; 上の Γ_n の一般化), もう一つは変数も値も正標数のもの (幾何学的 Γ) であり、以下で（多重）ゼータ値とともに現れるのは前者である。

1991 年、Yu [30] は ζ の「奇」数点での値に関する次の定理を証明した：

定理 1.2. $(q-1) \nmid n$ のとき $\zeta(n), \zeta(n)/\tilde{\pi}^n$ はともに K 上超越的である。

2007 年、Chieh-Yu Chang と Yu [12] は $\zeta(n)$ 達の代数的独立性に関する次の決定的な結果を証明した：

定理 1.3. 整数 $n \geq 1$ に対し

$$\text{trans.deg}_K K(\tilde{\pi}, \zeta(1), \ldots, \zeta(n)) \ = \ 1 + n - \left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n}{q-1}\right] + \left[\frac{n}{p(q-1)}\right].$$

ここに $[x]$ は「切り下げ」を表す。標数 p のゼータに於いては $\zeta(pn) = \zeta(n)^p$ が成り立ち、また、$(q-1) \mid n$ のとき $\zeta(n) = \tilde{\pi}^n \times$ (K の元) である（定理 1.1）が、上の定理はこれら以外に $\zeta(n)$ 達の間には代数的関係式が存在しない事を示してゐる。因みに Riemann zeta $\zeta_{\mathbb{Z}}$ の場合は

$$\text{trans.deg}_K K(\pi, \zeta_{\mathbb{Z}}(2), \ldots, \zeta_{\mathbb{Z}}(n)) \ = \ n - \left[\frac{n}{2}\right]$$

が予想されてゐる。

1997 年、Samarendra Sinha は [22] に於いて幾何学的 Γ の値を t-motive を用ゐて解釈する事によりその性質を調べ、[23] に於いて Γ-値に関する「Deligne の相互律」の函数体類似を証明した。

2004 年、Greg W. Anderson, W. Dale Brownawell, Matthew A. Papanikolas [2] は（幾何学的 Γ について）$\Gamma(a)$ $(a \in K)$ 達の間の代数的関係式を決定した。

2004 年、Thakur [26] は函数体の多重ゼータ値を、K_∞-値のものと $\mathbb{R}$-値のものと、二通り定義した。以下で扱うのは前者で、次の様に定義される：

$$\zeta(n_1, \ldots, n_d) \ := \ \sum \frac{1}{a_1^{n_1} \cdots a_d^{n_d}} \qquad (n_i = 1, 2, \ldots).$$

この右辺の和は $\deg(a_1) > \cdots > \deg(a_d) \geq 0$ なる全ての $a_i \in A_+$ 達に亘つて取る（$n_i = 1$ でも収束する）。この値は $\neq 0$ である。($\mathbb{R}$-値のものは右辺の a_i を単にその絶対値で置き換へて定義する。)

2008 年、Papanikolas [21] は Carlitz log 値達の間の代数的独立性を証明した。

2012 年、Chang [10] は多重ゼータ値に関する “isobar 予想” を証明した：

定理 1.4. 重さの異なる多重ゼータ値達の間には $\overline{K}$ 上の線型関係は存在しない。

2013 年、三柴善範 [18], [19] は幾つかの多重ゼータ値達の代数的独立性を証明した：

定理 1.5. (1) n は整数 ≥ 1 で $(q-1) \nmid n$ と仮定する。このとき：

(1-1) $\tilde{\pi}, \zeta(n), \zeta(n,n)$ は K 上代数的独立であるか、または $\zeta(n)^2 - 2\zeta(n,n) \in \tilde{\pi}^{2n} K^{\times}$ を満たす。もし $(q-1) \nmid 2n$ ならば $\tilde{\pi}, \zeta(n), \zeta(n,n)$ は K 上代数的独立である。

(1-2) 任意の整数 $e \geq 1$ に対し $\tilde{\pi}, \zeta(n), \zeta(p^e n, n)$ は K 上代数的独立である。また、$\tilde{\pi}, \zeta(n), \zeta(n, p^e n)$ も K 上代数的独立である。

(2) $n_1, \ldots, n_d$ は整数 ≥ 1 で $(q-1) \nmid n_i$ と仮定し、さらに $i \neq j$ ならば n_i/n_j は $p^{\text{冪}}$ では<u>ない</u>と仮定する。このとき、$\{\tilde{\pi}\} \cup \{\zeta(n_k, \ldots, n_l) | \ 1 \leq k \leq l \leq d\}$ の元達は K 上代数的独立である。

定理 1.3 〜 1.5 の様な、多重ゼータ値や Carlitz log 値の代数的独立性の証明の鍵は主に以下の三つである：

- 周期の t-motive による解釈 ([3], [4]),
- ABP 判定規準 ([2]),
- t-motive に対する motivic Galois 群の理論 ([21]).

そこで以下これらを順次説明し (§2–§4)、最後に代数的独立性の証明の粗筋を典型的な場合に説明する (§5)。

2 t-motive による解釈

t-motive の概念は Anderson [1] により定義された。t-motive とは「$\mathbb{F}_p[t]$-係数の motive」の謂である。それは $\mathbb{F}_p[t]$-係数の Dieudonné 加群の様なものであるが、普通の Dieudonné 加群が有限体上（か、せいぜい p 進的な対象上）の対象でしかないのに対し、t-motive は大域的な対象であり得るところが大きな利点である。

以下で L は $\mathbb{A}$ 上の体であつて完全体であるものとする。（本稿での応用上は $L = \overline{K}$ と思つてよい。）

定義 2.1. L 上の <u>t-motive</u> とは $L[t]$-加群[4] M であつて
- Frobenius 線型写像[5] $\tau : M \to M$ が与へられてをり、
- M は $L[t]$-加群としても左 $L\{\tau\}$-加群としても自由かつ有限階数であり、
- 十分大きい自然数 N に対し $(t-\theta)^N (M/\tau M) = 0$ となるもの、

の事である。

最後の条件より、$\det \tau$ （これは modulo $(L^{\times})^{q-1}$ の元倍で決まる）は $c(t-\theta)^w$ ($c \in L^{\times}$, $w \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) の形となる。

Drinfeld 加群の高次元化で「Abelian t-module」([1]) といふものがあり、t-motives/L の圏と Abelian t-modules/L の圏とは反圏同値になつてゐる。

[4]（個人的な意見であるが）$L[t]$ は $L \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q[t]$ と読み、基礎体 L と係数環 $\mathbb{F}_q[t]$ がそれぞれ作用してゐる、と思ふのが好ましい。

[5]加法的かつ $\tau(cm) = c^q \tau(m)$ ($c \in L$, $m \in M$) なる事。

Abelian t-module とは、$\mathbb{A}$ の作用付きの可換群概型であつて群概型としては $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^n$ と同型であり、かつ多少の条件を満たすものである。Abelian t-module E に対し

$$M(E) \;:=\; \mathrm{Hom}_{L,\mathbb{F}_q\text{-lin}}(E, \mathbb{G}_{\mathrm{a}})$$

($\mathrm{Hom}_{L,\mathbb{F}_q\text{-lin}}$ は L 上定義された $\mathbb{F}_q$-線型な群概型の射全体のなす加群) とおくと、これには自然に L と A が作用し、さらに E 上の q-乗 Frobenius が $\tau : M(E) \to M(E)$ を誘導し、$M(E)$ は t-motive になる。この函手 M が上記の反同値を与へる。

例 2.2. Carlitz 加群 C に対応する t-motive は

$$M(C) = L[t] \qquad \text{with} \quad \tau = t - \theta$$

で与へられ、Carlitz t-motive と呼ばれる。ここで「$\tau = t - \theta$」の意味は

$$\begin{aligned} \tau :\; M(C) &\to M(C) \\ m &\mapsto (t-\theta)m^{(1)} \end{aligned}$$

といふ事である。但し $m = \sum_i m_i t^i \in L[t]$ と $j \in \mathbb{Z}$ に対し

$$m^{(j)} := \sum_i m_i^{q^j} t^i$$

と定義する。

t-motives の圏の良い所はテンソル積が取れる事である：

定義 2.3. L 上の二つの t-motives M_1, M_2 に対し、そのテンソル積 $M_1 \otimes M_2$ を

$$M_1 \otimes M_2 := M_1 \otimes_{L[t]} M_2 \qquad \text{with} \quad \tau := \tau_1 \otimes \tau_2$$

により定義する。

例 2.4. n を整数 ≥ 1 とする。Carlitz t-motive の n 階のテンソル積 $M(C)^{\otimes n}$ は n 次 Carlitz t-motive と呼ばれ、

$$M(C)^{\otimes n} = L[t] \qquad \text{with} \quad \tau = (t-\theta)^n$$

なる t-motive である。これに対応する Abelian t-module $C^{\otimes n}$ は n 次 Carlitz module と呼ばれ、群概型としては $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^{\oplus n}$ と同型であり、$t \in \mathbb{A}$ の作用 $[t]_{C^{\otimes n}}$ は ($\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^{\oplus n}$ の標準座標に関して) 次の様に書ける：

$$[t]_{C^{\otimes n}} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ 1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^q \\ \vdots \\ x_n^q \end{bmatrix}$$

$\zeta(n)$ の $C^{\otimes n}$ による解釈 ([3]).

まづ指数写像

$$\exp_n : \mathrm{Lie}(C^{\otimes n})(\mathbb{C}_\infty) \ \to \ C^{\otimes n}(\mathbb{C}_\infty)$$

とその局所逆写像である対数写像 $\log_n$ がある事を思ひ出しておく ([3], §2). 次の定理は Carlitz ゼータ値が "$\log_n$(整数点)" 的な点の第 n 座標として書ける、といふ結果である：

定理 2.5 ([3], Th. 3.8.3). 或る A-値点 $Z_n \in C^{\otimes n}(A)$ と K_∞-値点 $z_n \in \mathrm{Lie}(C^{\otimes n})(K_\infty)$ が存在して

$$\exp_n(z_n) = Z_n \quad \text{かつ} \quad z_n = \begin{bmatrix} \vdots \\ \Gamma_n \zeta(n) \end{bmatrix}$$

となる。

次に t-motivic な解釈に移らう。以下では Anderson の (original の) t-motive でなく、その変種が用ゐられる。Dual t-motive ([26], §7.1) とは t-motive の定義に於いて Frobenius 線型な τ の代りに Frobenius^{-1} 線型な $\sigma : M \to M$ を使つたものである。つまり、τ の代りに

$$\sigma \ = \ \tau^{-1}$$

を使ふといふだけで、本来の t-motive と大差無い。L 上の t-motive や dual t-motive は有限階数の自由 $L[t]$-加群であるが、これらを modulo isogeny で考へるときは単に $\mathbb{A}$ 上 $\mathbb{F}_q(t)$ をテンソルして考へればよい。従つて L 上の "(dual) iso-t-motive" は自由 $L \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q(t)$-加群であるべきであるが、実は $L(t)$-ベクトル空間として定義しても大概実害は無い (cf. [24], §3)。Papanikolas [21] は有限次元 $L(t)$-ベクトル空間に σ と σ^{-1} の作用が両方付いた t-motive を扱つてゐる。以下の話のためにはこれが最も都合が良い。これを本稿では Papanikolas の t-motive と呼ぶ事にする。この文脈で最も基本的なのが dual Carlitz t-motive $M^*(C)$ 及びその高次テンソル冪である n 次 dual t-motive

$$M^*(C)^{\otimes n} \ = \ L(t) \qquad \text{with} \ \ \sigma = (t-\theta)^n$$

である。これは実質 " $M(C)^{\otimes(-n)}$ " である。(Papanikolas [21] はこれを n 次 Carlitz t-motive と呼んでゐるが、本稿では dual もさうでないのも両方出て来るので、この様に区別しておく。)

多重ゼータ値の mixed Carlitz t-motive による解釈 ([4]).

M を $\overline{K}$ 上の (Papanikolas の意味の) t-motive とする（従つて M は有限次元 $\overline{K}(t)$-ベクトル空間で Frobenius^{-1} 線型写像

$$\sigma : M \ \to \ M$$

を具へてゐる)。Tate 代数

$$\mathbb{T} \;=\; \left\{ |t|_\infty \leq 1 \text{ で収束する冪級数 } \sum_i a_i t^i \in \mathbb{C}_\infty[\![t]\!] \right\}$$

(ここに $\mathbb{C}_\infty$ の絶対値 $|\cdot|_\infty$ は K_∞ の $(1/\theta)$-進絶対値の延長)の分数体を $\mathbb{L}$ とし、

$$B(M) \;:=\; (\mathbb{L} \otimes_{\overline{K}(t)} M)^\sigma$$

とおく(右辺の $(\ )^\sigma$ は対角的に作用させた σ の固定部分)。これは有限次元 $\mathbb{F}_q(t)$-ベクトル空間であり、その次元は $\leq \dim_{\overline{K}(t)}(M)$ である。B は t-motives のなすテンソル圏から $\mathbb{F}_q(t)$-ベクトル空間の圏へのファイバー函手である。そこで、例へば、M の motivic Galois 群(淡中基本群)が定義出来る。

ここで序でに次の部分環 $\subset \mathbb{T}$ を定義しておく:

$$\mathbb{E} \;=\; \left\{ \mathbb{C}_\infty \text{ 全体で収束する冪級数 } \sum_i a_i t^i \in \mathbb{C}_\infty[\![t]\!] \,\middle|\, [K_\infty(a_i; \forall i) : K_\infty] < \infty \right\}.$$

多くの有用な函数 $\in \mathbb{T}$ は $\mathbb{E}$ にも属する (cf. 定理 3.1).

定義 2.6. t-motive M が rigid-analytically trivial とは等式

$$\dim_{\mathbb{F}_q(t)}(B(M)) \;=\; \dim_{\overline{K}(t)}(M)$$

が成り立つ事である。

以下に現れる t-motive は全て rigid-analytically trivial であると仮定する(具体的に定義するものは全てさうなつてゐる)。

$r := \dim_{\overline{K}(t)}(M)$ とおく。M 上の σ の作用は、M の基底を一つ固定すると、行列

$$\Phi \;\in\; \mathrm{M}_r(\overline{K}(t))$$

により表され、$B(M)$ の元は「線型 Frobenius^{-1}-方程式」

$$\psi^{(-1)} \;=\; \Phi\psi$$

の解 $\psi \in \mathbb{L}^r$ と、従つて $B(M)$ の一組の基底は方程式

$$\Psi^{(-1)} \;=\; \Phi\Psi \tag{1}$$

の解 $\Psi \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{L})$ と、一対一に対応[6] する。ここに $\Psi^{(-1)}$ は Ψ の各成分の係数を q^{-1} 乗したものである。上の様な解 Ψ を Φ に対する 基本行列 と呼ぶ。Ψ の各成分に θ を代入したものは M の 周期 と呼ばれる。例へば:

[6] Papanikolas [21] の記号法では、M の基底 $\boldsymbol{m} = {}^{\mathrm{t}}(m_1, \ldots, m_r)$ を選んで縦ベクトルと思ひ、$\mathbb{L} \otimes_{\overline{K}(t)} M$ の一般の元 x_i の r 組 $\boldsymbol{x} = {}^{\mathrm{t}}(x_1, \ldots, x_r)$ を $\boldsymbol{x} = \Psi^{-1}\boldsymbol{m}$ と書く事により $\boldsymbol{x}$ と Ψ とを対応させてゐる。

例 2.7. M が n 次 dual Carlitz t-motive $M^*(C)^{\otimes n}$ のとき、$\Phi = (t-\theta)^n$ であり、

$$\Omega \;=\; (-\theta)^{-\frac{q}{q-1}} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{\theta^{q^i}}\right) \quad \in \mathbb{E}$$

の冪 Ω^n が基本行列である、即ち

$$(\Omega^n)^{(-1)} \;=\; (t-\theta)^n \Omega^n$$

を満たす。この Ω が Carlitz 基本周期を与へる：

$$\tilde{\pi} \;=\; 1/\Omega(\theta).$$

次に導入する Φ と Ψ は多重ゼータ値と直接的に関係するものである：$\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ を $\overline{K}[t]$ の元として

$$\Phi := \begin{bmatrix} (t-\theta)^{n_1+\cdots+n_d} & & & & \\ \alpha_1^{(-1)}(t-\theta)^{n_1+\cdots+n_d} & (t-\theta)^{n_2+\cdots+n_d} & & & \\ & \alpha_2^{(-1)}(t-\theta)^{n_2+\cdots+n_d} & \ddots & & \\ & & \ddots & (t-\theta)^{n_d} & \\ & & & \alpha_d^{(-1)}(t-\theta)^{n_d} & 1 \end{bmatrix}$$
$$\in \mathrm{GL}_{d+1}(\overline{K}(t))$$

とおく。この Φ の定義する t-motive M_Φ は高次 dual Carlitz t-motives の逐次拡大であるから、M_Φ は mixed Carlitz t-motive とでも呼ぶべきものである。さらに

$\Psi = (\Psi_{ij}) \ \in \mathrm{M}_{d+1}(\mathbb{E})$, where

$$\Psi_{ij} \;:=\; \begin{cases} \Omega^{n_j+\cdots+n_d} L_{\alpha_j,\ldots,\alpha_{i-1},n_j,\ldots,n_{i-1}} & \text{if } i \geq j, \\ 0 & \text{if } i < j, \end{cases}$$

とおく。ここに $L_{\underline{\alpha},\underline{n}}$ は、$\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \overline{K}[t]$ と $n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し

$$L_{\underline{\alpha},\underline{n}} \;:=\; \sum_{i_1 > \cdots > i_d \geq 0} \frac{\alpha_1^{(i_1)} \cdots \alpha_d^{(i_d)}}{((t-\theta^q)\cdots(t-\theta^{q^{i_1}}))^{n_1} \cdots ((t-\theta^q)\cdots(t-\theta^{q^{i_d}}))^{n_d}} \quad \in \overline{K}_\infty[\![t]\!]$$

（但し $L_{\emptyset,\emptyset} := 1$）と定義する。この $L_{\underline{\alpha},\underline{n}}$ は多重 polylog の函数体類似物であり、函数等式

$$L_{\underline{\alpha},\underline{n}}^{(-1)} \;=\; \frac{\alpha_d^{(-1)}}{(t-\theta)^{n_1+\cdots+n_{d-1}}} L_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{d-1},n_1,\ldots,n_{d-1}} + \frac{L_{\underline{\alpha},\underline{n}}}{(t-\theta)^{n_1+\cdots+n_d}}$$

を満たす。この事から上の Φ, Ψ は Frobenius^{-1} 線型方程式 (1) を満たす事が分かる。

ところで [3] の §3.7 により或る多項式 $H_n \in \mathbb{F}_q[\theta, t]$ があり、等式

$$(H_{n-1}\Omega^n)^{(i)}(\theta) \;=\; \frac{\Gamma_n S_i(n)}{\tilde{\pi}^n} \tag{2}$$

を満たす。ここに $S_i(n)$ は Carlitz ゼータ値の i 次部分

$$S_i(n) \;:=\; \sum_{a \in A_+, \deg(a)=i} \frac{1}{a^n}$$

である。因みに多項式 H_n は次の冪級数の等式により定義される：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{\Gamma_{n+1}(t)} x^n \;=\; \left(1 - \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{t^{q^i} - \theta^{q^i}}{t^{q^i} - t^{q^{j-1}}} x^{q^i}\right)^{-1}.$$

(2) より、多重 polylog $L_{\underline{\alpha},\underline{n}}$ の定義式に於いて $\alpha_i = H_{n_i-1}$ と特殊化したものに $t=\theta$ を代入すると（収束して）次が得られる：

$$(\Omega^{n_1+\cdots+n_d} L_{H_{n_1-1},\ldots,H_{n_d-1},n_1,\ldots,n_d})(\theta) \;=\; \frac{\Gamma_{n_1}\cdots\Gamma_{n_d}\zeta(n_1,\ldots,n_d)}{\tilde{\pi}^{n_1+\cdots+n_d}}.$$

かくして Φ で定義される mixed Carlitz t-motive M_Φ の周期に多重ゼータ値が現れるのである。

3 ABP 判定規準

ABP 判定規準とは Anderson-Brownawell-Papanikolas [2] により証明された次の定理の事である：

定理 3.1. 行列 $\Phi \in \mathrm{M}_r(\overline{K}[t])$ は

$$\det(\Phi) = c(t-\theta)^w \qquad \text{for some} \quad c \in \overline{K}^\times,\ w \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

を満たすとし、ベクトル $\psi \in \mathrm{M}_{r\times 1}(\mathbb{T})$ は方程式

$$\psi^{(-1)} \;=\; \Phi\psi$$

を満たすとする。このとき実は $\psi \in \mathrm{M}_{r\times 1}(\mathbb{E})$ であり、任意のベクトル $\rho \in \mathrm{M}_{1\times r}(\overline{K})$ であつて $\rho\psi(\theta) = 0$ なるものに対し或るベクトル $P \in \mathrm{M}_{1\times r}(\overline{K}[t])$ が存在して $P(\theta) = \rho$ かつ $P\psi = 0$ となる。

[即ち $\psi(\theta)$ の成分達の間の $\overline{K}$ 上の線型関係式は ψ の成分達の間の $\overline{K}[t]$ 上の線型関係式に持ち上がる。或いは、ψ の成分達の独立性は特殊化 $t \to \theta$ で失はれない。]

Brownawell は [7] の冒頭で “working hypothesis” として

> Transcendence Expectation. *Values of ordinary transcendental functions are subject to no unpredictable algebraic relations.*

と述べてゐるが、上の定理もこの期待を支持するものの一つである。

因みに ABP 判定規準の微分方程式版として Siegel-Shidlovskii の判定規準（の改良版）[6] がある。

ABP 判定規準は以下に述べる Yu の「解析的 t-部分加群定理」の t-motive 版である。[2] の §1.3.4 によると、彼らは Yu の定理を t-motive 用に書き換へようとしてゐて（それに依らない）独立な証明を発見したさうで、これら二つの定理は結局同じ程度の強さと思はれる、との事である。

解析的 t-部分加群定理 3.3 ([31]). E を $\overline{K}$ 上定義された Abelian t-module[7] とし、$u \in \mathrm{Lie}E(\mathbb{C}_\infty) \smallsetminus \{0\}$ は $\exp_E(u) \in E(\overline{K})$ なる元とする。V を Lie E の $\overline{K}$-部分空間であつて次の性質を持つ最小のものとする：
- V は t の Lie E への微分作用で安定、
- $V \otimes_{\overline{K}} \mathbb{C}_\infty$ は u を含む。
このとき、E の或る t-部分加群 F であつて $\overline{K}$ 上定義されてをりかつ $V =$ Lie F となるものが存在する。

Yu はこれを用ゐて Carlitz ゼータ値の線型独立性に関する次の結果を証明した：

定理 3.4. 整数 $m \geq 0$, $n \geq 1$ に対し

$$\dim_{\overline{K}} \langle 1, \tilde{\pi}, \ldots, \pi^m, \zeta(1), \ldots, \zeta(n) \rangle_{\overline{K}} \;=\; 1 + \max\{m, n\} + \kappa(\min\{m, n\}).$$

ここに $\kappa(M) := \#\{i \in [1, M] \cap \mathbb{Z} |\ (q-1) \nmid i\}$ とおいた。

解析的 t-部分加群定理は次の定理の t-加群類似である：

解析的部分群定理 3.5 ([28]). E を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された可換代数群とし、$u \in$ Lie $E(\mathbb{C}) \smallsetminus \{0\}$ は $\exp_E(u) \in E(\overline{\mathbb{Q}})$ なる元とする。V を Lie E の $\overline{\mathbb{Q}}$-部分空間であつて $V \otimes_{\overline{K}} \mathbb{C}_\infty$ が u を含む様な最小のものとする。このとき、E の或る部分代数群加群 F であつて $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義されてをりかつ $V =$ Lie F となるものが存在する。

これら二つの定理の証明は所謂 "zero estimate" に依る。その証明は複雑だが、使ふ道具は基本的に可換代数と Bézout の定理だけである。

これらの定理が周期の超越性を証明するのにどう使はれるのか、典型的な例で見てみよう：

定理 3.6 (Lindemann, 1882). $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ と e^α が同時に代数的数になる事はない。

<u>証明</u>. $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の代数群 $E = \mathbb{G}_{\mathrm{a}} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ に解析的部分群定理を適用する。この場合の $\exp_E : \mathrm{Lie}\ E(\mathbb{C}) \to E(\mathbb{C})$ は

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times \\ (z, w) & \mapsto & (z, e^w) \end{array}$$

[7] [31] では Abelian t-module よりもう少し一般に "regular t-module" なるものについてこの定理が証明されてゐる。

で与へられる。今 α と e^{α} がともに $\in \overline{\mathbb{Q}}$ と仮定する。対角部分空間 $V = \{(z,z)\} \subset \mathrm{Lie}\ E \simeq \overline{\mathbb{Q}} \times \overline{\mathbb{Q}}$ は $V \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C} \ni (\alpha, \alpha)$ となる最小の $\overline{\mathbb{Q}}$-部分空間である。解析的部分群定理により、$\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された E の部分代数群 F が存在して $\mathrm{Lie}\ F = V$ となる。ところが $F(\mathbb{C}) = \{(z, e^z) |\ z \in \mathbb{C}\}$ であり、e^z は $\mathbb{C}(z)$ 上超越的であるから、F が代数群である事に矛盾する。 $\square$

ABP 判定規準は周期の超越性に関する最近の一連の結果の証明の鍵であるので、その証明も紹介したいところだが、長くて複雑（といふか、その「心」が量り難い）ので、$r = 1$ の場合だけ説明してお茶を濁す事にする（それでも幽かに雰囲気は感じて頂けるものと思ふ)。先づ、「Φ, ψ が定理の仮定を満たせば実は $\psi \in \mathrm{M}_{r\times 1}(\mathbb{E})$」といふ事は比較的容易に確かめられる。そこで、$r = 1$ のとき、示すべきは、$\psi^{(-1)} = c(t-\theta)^w \psi$ ($c \in \overline{K}^{\times}$, $w \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) なる $\psi \in \mathbb{E}$ について

$$\psi(\theta) = 0 \implies \psi = 0$$

といふ事である。実際、

$$\psi(\theta^{q^{-(\nu-1)}})^{q^{-1}} \;=\; \psi^{(-1)}(\theta^{q^{-\nu}}) \;=\; c(\theta^{q^{-\nu}} - \theta)^w \psi(\theta^{q^{-\nu}}).$$

$\psi(\theta) = 0$ より帰納的に $\psi(\theta^{q^{-\nu}}) = 0$ が出る。$\mathbb{C}_{\infty}$ 全体で収束する函数 ψ が有界領域内の無限個の点 $t = \theta^{q^{-\nu}}$ で消えるので、$\psi = 0$. $\square$

ABP 判定規準の基本的な応用を一つだけ挙げておく：

系 3.7. $\tilde{\pi} = 1/\Omega(\theta)$ は K 上超越的である。

証明. $\Omega(\theta)$ が K 上代数的とする：

$$\rho_0 + \Omega(\theta) = 0 \qquad \text{for some} \quad \rho_0 \in \overline{K}^{\times}.$$

すると ABP により

$$P_0 + P_1\Omega(t) = 0 \qquad \text{for some} \quad P_i \in \overline{K}[t],\ P_0(\theta) = \rho_0,\ P_1(\theta) = 1.$$

ところが Ω の定義 (例 2.7) により $\Omega(\theta^{q^i}) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ だから $P_0(\theta^{q^i}) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. P_0 は多項式だから $P_0 = 0$ となり、矛盾。 $\square$

4 Papanikolas の理論

Papanikolas の意味の t-motive (cf. §2) M に対し、一般論 (例へば [13]) によりその motivic Galois 群（淡中基本群） Γ_M が定義される。即ち Γ_M は M が生成する淡中圏から $\mathbb{F}_q(t)$-ベクトル空間の圏へのファイバー函手 B の自己同型群であり、$\mathbb{F}_q(t)$ 上の有限次元線型代数群である。それは $\mathrm{GL}_{\mathbb{F}_q(t)}(B(M))$ の部分代数群と自然に同一視される。一方、方程式 (1) の解 Ψ から代数群 Γ_{Ψ} が次の様に定義される：Γ_{Ψ} は $\mathbb{F}_q(t)$ 上定義された GL_r の部分代数群であつて $(\Psi \otimes 1)^{-1}(1 \otimes \Psi) \in \Gamma_{\Psi}(\mathbb{L} \otimes_{\overline{K}(t)} \mathbb{L})$ となる最小のもの。[8] Papanikolas [21] の主定理の一つは：

[8] ここに $\Psi \otimes 1$ 等は Kronecker 積ではなく (i,j)-成分が $\Psi_{ij} \otimes 1$ である行列 $\in \mathrm{GL}_r(\mathbb{L} \otimes_{\overline{K}(t)} \mathbb{L})$ を意味する。

定理 4.1. t-motive M が行列 $\Phi \in \mathrm{M}_r(\overline{K}(t))$ で定義されてをり、$\Psi = (\Psi_{ij})$ が Φ に対する基本行列であるとき、次が成り立つ：

(1) $\Gamma_M \simeq \Gamma_\Psi$.

(2) $\dim(\Gamma_M) = \mathrm{trans.deg}_{\overline{K(t)}}\overline{K}(t)(\Psi_{ij}|\forall i,j)$.

これと ABP 判定規準（定理 3.1）を組合せて少し工夫すると次が得られる：

定理 4.2. Φ は ABP 判定規準 3.1 の仮定を満たすとし、$\Psi = (\Psi_{ij}) \in \mathrm{M}_r(\mathbb{T})$ はそれに対する基本行列であるとする。このとき実は $\Psi \in \mathrm{M}_r(\mathbb{E})$ であり、次の等式が成り立つ：

$$\dim(\Gamma_\Psi) \ = \ \mathrm{trans.deg}_{\overline{K}}\overline{K}(\Psi_{ij}(\theta)|\ \forall i,j).$$

この定理は例へば定理 1.3, 1.4, 1.5 等の証明で本質的に使はれる。

前節で見た様に $\Psi_{ij}(\theta)$ として多重ゼータ値等意味ありげな周期が現れるので、上の二つの定理により、Γ_M の次元を計算する事により周期達の間の代数的な関係や独立性を或る程度知る事が出来ると期待される。

5　代数的独立性

典型的な場合として、（第１節の最後にも述べた）次の定理の証明の概略を紹介する：

定理 ([18]). n は整数 ≥ 1 とする。$(q-1)\nmid n$ のとき、$\tilde{\pi}, \zeta(n), \zeta(n,n)$ は K 上代数的独立であるか、または $\zeta(n)^2 - 2\zeta(n,n) \in \tilde{\pi}^{2n}K^\times$ を満たす。もし $(q-1)\nmid 2n$ ならば $\tilde{\pi}, \zeta(n), \zeta(n,n)$ は K 上代数的独立である。

<u>証明の粗筋</u>. 次の Φ で定義される Papanikolas の t-motive を考へる：

$$\Phi \ := \ \begin{bmatrix} (t-\theta)^{2n} & & \\ \alpha^{(-1)}(t-\theta)^{2n} & (t-\theta)^n & \\ & \alpha^{(-1)}(t-\theta)^n & 1 \end{bmatrix}.$$

対応する基本行列は

$$\Psi \ := \ \begin{bmatrix} \Omega^{2n} & & \\ \Omega^{2n}L_{\alpha,n} & \Omega^n & \\ \Omega^{2n}L_{\alpha,\alpha,n,n} & \Omega^n L_{\alpha,n} & 1 \end{bmatrix}$$

である。ここに現れる函数の成分は $\alpha = H_{n-1}$, $t=\theta$ と特殊化すると $\Omega(\theta) = 1/\tilde{\pi}$, $L_{\alpha,n}(\theta) = \Gamma_n\zeta(n)$, $L_{\alpha,\alpha,n,n}(\theta) = \Gamma_n^2\zeta(n,n)$, となるから、$\tilde{\pi}, \zeta(n), \zeta(n,n)$ が K 上代数的独立である事を言ふには、定理 4.2 により、$\dim\Gamma_\Psi = 3$ を示せばよい。Φ, Ψ の「右下」の 2×2 行列をそれぞれ Φ', Ψ' とし、Φ, Φ' に対応する t-motive をそれぞれ M_Φ, $M_{\Phi'}$ とすると、$M_{\Phi'}$ は M_Φ の商であり、

また $M_{\Phi'}$ は n 次 dual Carlitz t-motive $M^*(C)^{\otimes n}$ を含むから、$\mathbb{F}_q(t)$ 上の代数群の全射の列

$$\Gamma_\Psi \twoheadrightarrow \Gamma_{\Psi'} \twoheadrightarrow \Gamma_{M^*(C)^{\otimes n}} \tag{3}$$

がある。ここで $\Gamma_{M^*(C)^{\otimes n}}$ は乗法群 $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ と同型であり、$\Gamma_{\Psi'} \simeq \left\{ \begin{bmatrix} a & \\ x & 1 \end{bmatrix} \right\}$ である事が知られてゐる（$\tilde{\pi}$ と $\zeta(n)$ の代数的独立性；ここで $(q-1) \nmid n$ といふ条件を使ふ)。また、Γ_Ψ が 3 次元代数群 $\left\{ \begin{bmatrix} a^2 & & \\ ax & a & \\ y & x & 1 \end{bmatrix} \right\}$ の部分群と同一視される事も容易に分かる。そこで Γ_Ψ が実はこの代数群全体に一致する事を言へばよい。因みに上の全射の列 (3) はこれらの行列の言葉では

$$\begin{bmatrix} a^2 & & \\ ax & a & \\ y & x & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & \\ x & 1 \end{bmatrix} \mapsto a$$

である。$\dim \Gamma_\Psi < 3$ と仮定して計算して行くと、$p \neq 2$ のとき[9]

$$\tilde{\pi}^{-2n} \left(\zeta(n)^2 - 2\zeta(n,n) \right) \in K^\times$$

といふ式が得られる。$(q-1) \nmid 2n$ といふ条件は $\tilde{\pi}^{2n} \notin K_\infty$ と同値なので、定理の結論が従ふ。

References

[1] G. W. Anderson, *t-motives*, Duke Math. J. **53** (1986), 457–502

[2] G. W. Anderson, W. D. Brownawell and M. A. Papanikolas, *Determination of the algebraic relations among special* Γ*-values in positive characteristic*, Ann. of Math. **160** (2004), 237–313

[3] G. W. Anderson and D. S. Thakur, *Tensor powers of the Carlitz module and zeta values*, Ann. of Math. **132** (1990) 159–191

[4] G. W. Anderson and D. S. Thakur, *Multizeta values for* $\mathbb{F}_q[t]$*, their period interpretation, and relations between them*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2009), 2038–2055

[5] A. Baker and G. Wüstholz, *Logarithmic Forms and Diophantine Geometry*, New Mathematical Monographs **9**, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[6] F. Beukers, *A refined version of the Siegel-Shidlovskii theorem*, Ann. of Math. **163** (2006), 369–379

[9] $p = 2$ のときは別に扱ふのだが、ここでは略。

[7] W. D. Brownawell, *Transcendence in positive characteristic*, in: “Number Theory” (Tiruchirapalli, 1996), Contemp. Math. **210**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 317–332

[8] L. Carlitz, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke. Math. J. **1** (1935) 137–168

[9] L. Carlitz, *An analogue of the von Staudt-Clausen theorem*, Duke Math. J. **3** (1937), 503–517

[10] C.-Y. Chang, *Linear independence of monomials of multizeta values in positive characteristic*, preprint (2012), `http://arxiv.org/pdf/1207.2326v3.pdf`

[11] *On characteristic p multizeta values*, to appear in: 『代数的整数論とその周辺 2012』, 数理解析研究所講究録別冊

[12] C.-Y. Chang and J. Yu, *Determination of algebraic relations among special zeta values in positive characteristic*, Adv. Math. **216** (2007), 321–345

[13] P. Deligne, J. Milne, A. Ogus, K. Shih, *Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties*, Lect. Notes in Math. **900**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982

[14] V. G. Drinfel′d, *Elliptic modules* (Russian), Mat. Sb. **94** (1974), 594–627; English translation: Math. USSR-Sb. **23** (1976), 561–592

[15] D. Goss, *Modular forms for $\mathbb{F}_r[T]$*, J. Reine Angew. Math. **317** (1980), 16–39

[16] U. Hartl, *A dictionary between Fontaine-theory and its analogue in equal characteristic*, J. Number Theory **129** (2009), 1734–1757

[17] M. Kontsevich and D. Zagier, *Periods*, in: “Mathematics Unlimited — 2001 and Beyond”, pp. 771–808, Springer, Berlin, 2001.

[18] Y. Mishiba, *Algebraic independence of the Carlitz period and the positive characteristic multizeta values at n and (n, n)*, preprint (2013), `http://arxiv.org/pdf/1307.3725v1.pdf`

[19] Y. Mishiba, *On the algebraic independence of special values of Carlitz multiple polylogarithms*, preprint

[20] Y. Mishiba, *Positive characteristic multizeta values and their algebraic independence*, preprint

[21] M. A. Papanikolas, *Tannakian duality for Anderson-Drinfeld motives and algebraic independence of Carlitz logarithms*, Invent. Math. **171** (2008), 123–174

[22] S. Sinha, *Periods of t-motives and transcendence*, Duke Math. J. **88** (1997), 465–535

[23] S. Sinha, *Deligne's reciprocity for function fields*, J. Number Theory **63** (1997), 65–88

[24] Y. Taguchi, *On φ-modules*, J. Number Theory **60** (1996), 124–141

[25] D. S. Thakur, *Gamma functions for function fields and Drinfeld modules*, Ann. of Math. **134** (1991), 25–64

[26] D. S. Thakur, *Function Field Arithmetic*, World Scientific Publ., 2004

[27] L. I. Wade, *Certain quantities transcendental over* $\mathrm{GF}(p^n, x)$, Duke Math. J. **8**, (1941). 701–720

[28] G. Wüstholz, *Algebraische Punkte auf analytischen Untergruppen algebraischer Gruppen*, Ann. of Math. **129** (1989), 501–517

[29] J. Yu, *Transcendence and Drinfeld modules*, Invent. Math. **83** (1986), 507–517

[30] J. Yu, *Transcendence and special zeta values in characteristic p*, Ann. of Math. **134** (1991), 1–23

[31] J. Yu, *Analytic homomorphisms into Drinfeld modules*, Ann. of Math. **145** (1997), 215–233