不変式環の環論的性質

橋本 光靖

〒 464–8602 名古屋市千種区不老町
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

1　序

本論は不変式環の環論的性質, というタイトルでのサーベイであるが, このことは大きく二つに分けられる. 有限生成性 (ネーター性も含む) と, それ以外, である. 講演の方で的を絞りきれずに両方の話をさせて頂くこととなったので, この報告集でも, 両方の話題を扱ってみたい.

不変式環の生成元を求めようという努力は１９世紀に遡る. だから生成元がいつ有限個か？という問題も関連して極めて基本的であり, 本論でも述べるように, 現在でも活発な研究が続けられている. 動機についてほぼ説明不要の重要問題といえるだろう. 永田雅宜による Hilbert の第 14 問題に対する反例 [Na1] や, Mumford 予想に纏わる永田雅宜, Haboush らの活躍 [Na3], [Hab] は大変有名であるが, 1990 年の P. Roberts の論文 [Ro] に端を発する一連の研究によって, どの程度まで不変式環が有限生成にならないか, という線引きまで徐々にではあるが出来つつある.

「それ以外」の方の本格的な研究は, それに比べて, 比較的歴史が浅い. 丁度現代的可換環論の発展のあとを追いかけるような形で発展してきた, といえると思う. 1970 年代における有限群やトーラスの作用による不変式環の Cohen–Macaulay 性, Gorenstein 性に関する研究 [HE], [Ho1], [Wa1], [Wa2], [Sta], 線形簡約群の作用による不変式環の Cohen–Macaulay 性に関する Hochster–Roberts の定理 [HR] あたりでこの方向での研究が確立されたといえるのではないか. その後の Boutot の定理 [Bou] と密着閉包を用いた正標数でのアナロジーによってこの方向がさらに活性化した. 現在までに多岐にわたる研究結果が出ているので, 講演させていただいた内容プラス ε に絞って解説する.

かなり古いが Hochster による小論と同じ趣旨のサーベイ [Ho2] がある. また, 有限群の作用については渡辺敬一による素晴らしい解説 [Wa4] がある.

この報告集を通して, R はネーター環, G はアフィン平坦有限型 R 群スキーム, S はネーターな G 代数 (つまり, G の作用する R 代数) とする. (左) G 加群と (右) $R[G]$ 余加群は同一視して区別しない [Ja, (I.2.8)]. G 加群 M に対して,

$$M^G = \{m \in M \mid \omega_M(m) = m \otimes 1 \in M \otimes R[G]\}$$

とおく. ここに ω_M は余作用 ([Ja] では 'comodule map' だが, この言い方はお奨めできない) である. この報告集を通し, $A = S^G$ は不変式環を表すとする. A は S の R 部分代数である. A の環論的性質を論ずるのが小論の目的である. 不馴れな方は R は代数閉体, G は R 上の線形代数群の場合をまずお考え頂き, 一般の場合を想像されてもそう大きな問題は起きないはずである.

講演の機会を与えてくださったオーガナイザーの皆さんに感謝します. 講演準備に数学上でご助力下さった黒田茂さん, 谷本龍二さんに感謝します. ビーマー関係でご助力下さった松岡直之さん, 高橋亮さんに感謝します.

この原稿執筆直前に, 永田雅宜先生がお亡くなりになりました. 心よりご冥福をお祈りするとともに, 長年末席の弟子としてご指導下さったご恩に, この場を借りて感謝申し上げます.

2 Reynolds 作用素と純部分環

A の環論的性質を論ずるのに, Reynolds 作用素と純部分環の概念は欠かせない.

定義 2.1. $\varphi : N \to M$ が R 加群の間の R 線形写像とする. φ が**純** (**pure**) であるとは, 任意の R 加群 V について, $1_V \otimes \varphi : V \otimes N \to V \otimes M$ が単射であることをいう. 純ならば単射である. $N \subset M$ で $N \hookrightarrow M$ が純のとき, N が M の純部分加群であるなどとも言う.

例 2.2. N が M の直和因子のとき, N は M の純部分加群である.

例 2.3. φ が単射で $\operatorname{Coker}\varphi$ が平坦なら φ は純である.

定義 2.4. C が環, B は部分環とする. $B \subset C$ が**純部分環** (resp. **直和因子部分環**) であるとは, B 加群として, B が C の純部分加群 (resp. 直和因子) であることをいう.

定義から直ちに, 直和因子部分環は純部分環であると分かる. B が C の純部分環の時, C の良い性質はしばしば B に遺伝する. そして, 今から述べ

るように, Reynolds 作用素を持てば, A は S の直和因子部分環になるのである. これが不変式論において Reynolds 作用素と純部分環が特に重要な理由である.

定義 2.5. C が G の座標環 $R[G]$ の**部分余代数**であるとは, C が $R[G]$ の純な R 部分加群で, $\Delta(C) \subset C \otimes C$ であることを言う.

平坦加群の純部分加群は平坦 (証明せよ) だから, 部分余代数 C は平坦であり, 右 C 余加群の圏は G 加群 (つまり右 $R[G]$ 余加群) の圏の, 部分対象, 準同型像で閉じた充満部分圏になっていることに注意する.

C が $R[G]$ の部分余代数とする. 余代数として $C = R \oplus D$ と直和分解しているとき, C は **Reynolds 作用素を持つ** という. ここに, 単位射 $R \to R[G]$ によって, $R \subset R[G]$ と見ている. $R[G]$ 自身が Reynolds 作用素を持つとき, G が Reynolds 作用素を持つという. 任意の (右) C 余加群 V は

$$V = V^G \oplus U(V), \quad U(V) \text{ は } D \text{ 余加群},$$

と関手的に分解する. この分解に関する射影 $\phi_V : V \to V^G$ を **Reynolds 作用素** という. $\mathrm{Hom}_G(U(V), V^G) = 0$ であるから, ϕ_V が inclusion $V^G \hookrightarrow V$ の unique な G 線型な左逆になることは見易い.

例 2.6. $R = k$ は体で, $C := \operatorname{soc} R[G]$ とおくと C は $R[G]$ の部分余代数で, C は C 余加群として明らかに半単純. そこで D を C の自明でない単純部分加群すべての和とすれば, 容易に D は C の部分余代数で, $C = k \oplus D$ と分かる. C-comodule とは, 半単純 G 加群に他ならない.

例 2.7. $R = k$ が体のとき, G が線形簡約 (つまり, 任意の G 加群が半単純) であることと, G が Reynolds 作用素を持つことは同値である.

例 2.8. G が有限群で G の位数 $|G|$ が R で逆元を持てば G は Reynolds 作用素を持つ. 具体的に, $\phi_V(v) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} gv$ と書ける.

例 2.9. 任意の R 代数で代数閉体であるもの k に対して $G \otimes k$ が**連結**線形簡約代数群の時, G は Reynolds 作用素を持つ. ここでファイバーの連結性は大事であって, 単に各ファイバーが線形簡約なだけでは, G は Reynolds 作用素を持つとは限らないので注意が要る.

部分余代数 $C \subset R[G]$ は Reynolds 作用素を持つとする. S は G-algebra で $R[G]$ 余加群として C 余加群にもなっているとする (この状況を以後, **S が Reynolds 作用素を持つ**, という). Reynolds 作用素 $\phi_S : S \to S^G$ が存在する.

補題 2.10. Reynolds 作用素 $\phi_S : S \to S^G$ は, S^G 線形である. 特に, S^G は S の直和因子部分環.

証明. S^G が S の R 加群としての直和因子であることに注意する.

$S^G \otimes_R S$ は明らかに C 余加群であり, $S^G \otimes_R S^G = (S^G \otimes_R S)^G$, $S^G \otimes_R U(S) = U(S^G \otimes_R S)$ は明白.

$$S^G \otimes_R S \xrightarrow{1\otimes\phi_S} S^G \otimes_R S^G \cong (S^G \otimes_R S)^G$$

が $\phi_{S^G \otimes S}$ である. これと ϕ が自然変換であることとを合わせて,

$$\begin{tikzcd}
S^G \otimes_R S \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\phi"] & S \arrow[d, "\phi"] \\
S^G \otimes_R S^G \arrow[r, "m"] & S^G
\end{tikzcd}$$

は可換図式. ここに m は積である. これが示すべき事であった. □

純部分環に (したがって Reynolds 作用素を持つ S について S から S^G に) どんな良い性質が遺伝するかについては, 以下, 順次述べることにする.

3 有限生成性その 1, 一般的事実

不変式環の有限生成性について, 一般的事実を述べる.

定理 3.1 ([Has4]). R がネーター環, S' が有限生成 R 代数, A' が S' の R 部分代数で, S' の純部分環であるとすると, A' は R 代数として有限生成である.

即ち, 有限生成性は純部分環に遺伝する. 2 節で述べたことにより, 次を得る.

系 3.2. S が Reynolds 作用素を持って R 上有限生成とすると, $A = S^G$ は R 上有限生成.

注意 3.3.

- $R = k$ が体で $S = \bigoplus_{i\geq 0} S_i$ が次数つきで $S_0 = k$, G の作用が次数を保つときはこの系は有名な Hilbert の論法 (例えば [Mu1, 定理 4.46] などに見られる) で容易に示される.

- $R = k$ が体, S が半単純の場合のこの系は Borel の教科書 [Bor, (8.19)] に掲げられている. 証明には若干のギャップが見受けられる ($K[X]$ が Reynolds 作用素を持つとしているところが誤りである) が, 埋めることが可能 (各自試みよ) であり, 系 3.2 にはよらないで証明できる.

次は有名な Mumford 予想に纏わる話題を通り一遍だが紹介する.

定義 3.4. 代数閉体 $R = k = \bar{k}$ 上の代数群 (つまり有限型順滑な群スキーム) G が**簡約群** (**reductive group**) であるとは, G がアフィンかつ**連結**で, 根基 (最大連結正規可解部分群) がトーラス ($\mathbb{G}_m = GL_1$ の直積) であることをいう. さらに根基が自明の時, **半単純群**という.

簡約群の定義で連結性を要求しない流儀もあるので注意が要る.

例 3.5.
- GL_n, SL_n, PSL_n, Sp_{2n}, SO_n は簡約群. 以上のうち, GL_n 以外は半単純.
- 簡約群の直積は簡約群. 半単純群の直積は半単純群.
- トーラスは $\mathbb{G}_m = GL_1$ の直積なので, 簡約群.

SO_n の定義は標数 2 では注意が要る [Sp, Chapter 1, (2.1.2)].

定義 3.6. R が一般の時, G が簡約群であるとは, R 代数で代数閉体である任意の k に対して, $G \otimes k$ が簡約群であることをいう.

定義 3.7. $R = k$ が体のとき, G が**幾何学的に簡約** (**geometrically reductive**) とは, 任意の有限次元 G 加群 V と, 任意の $v \in V^G \setminus \{0\}$ に対して, ある次数 $r > 0$ の不変な斉次式 $f \in (\mathrm{Sym}_r V^*)^G$ が存在して, $f(v) \neq 0$ となることをいう.

注意 3.8. $R = k$ が体のとき, G が線形簡約であることと, (任意の V, v に対して) 上で r が 1 に取れて幾何学的に簡約であることは同値である.

次が不変式論の基本定理とでも言うべき重要な定理である.

定理 3.9 (永田雅宜, Haboush, Popov, Waterhouse, van der Kallen, Touzé–van der Kallen). $R = k$ が代数閉体の時, 次は同値.

1 G の単位連結成分の被約化 G°_{red} は簡約群.

2 G は幾何学的に簡約.

3 任意の k 上有限型の G 代数 S について, S^G は k 上有限型.

4 任意の k 上有限型の G 代数 S について, コホモロジー環 $\bigoplus_i H^i(G, S)$ は k 上有限生成代数.

以上の時, 標数 0 ならば, G は線形簡約である. 標数 p のときには, 定義 3.7 において, 任意の V, v に対して, r を p 巾に取れる. また, 任意の有限型 G 代数 S と S 加群として有限生成な (G, S) 加群 M について, M^G は有限生成 S^G 加群である.

上の主張のうち, **1** $\iff$ **2** $\iff$ **3** はまず G が被約のとき (つまり線形代数群の時) に証明された. この場合について, **1**⇒**2** は Mumford によって予想された (Mumford 予想). **2**⇒**3** は永田雅宜 [Na3] による. これにより Mumford 予想の重要性が増した. **2**⇒**1** は永田・宮田 [NM] によって示された. Mumford 予想 **1**⇒**2** は最終的に Haboush [Hab] によって解かれた. その後 Popov によって **3**⇒**1** が (Hilbert の第 14 問題の反例をうまく利用して) 示された.

G が被約とは限らない場合の **1** $\iff$ **2** $\iff$ **3** は Waterhouse [Wate], van der Kallen [vdK] による. **4**⇒**3** は自明. その逆 **3**⇒ **4** は Touzé と van der Kallen [TvdK] によって示された. G が有限群の場合は Evens による定理 [Ev, Theorem 6.1] からも従うことに注意する.

上の定理 (の一部) を一般の可換環上に拡張しようという試みが Seshadri らによってなされている.

定理 3.10. *R が永田環の時, G が簡約, S が R 上有限型ならば S^G は有限生成. また, 任意の有限型 G 代数 S と S 加群として有限生成な (G, S) 加群 M について, M^G は有限生成 S^G 加群である.*

講演では R が一般のネーター環となっていて, 永田環の条件が抜け落ちていました (永田環の条件が除けるかどうかは知りません). お詫びして訂正致します.

上の主張は「R 加群として有限生成自由であるような G 加群 V と G 準同型の全射 $\operatorname{Sym} V \to S$ が存在するような場合」に Seshadri [Se] によって証明され, そのような条件は G が split reductive ならばみたされることを Thomason [Th] が示して, 無条件に正しくなった.

この定理はすばらしいが, これ以上無い一般性を持っているとまでは言いがたい. 簡約群のクラスは (明らかに) 定理の結論が成り立つ次の場合を含んでいないからである.

補題 3.11. *G が有限群, S が R 上有限型ならば, A は有限型である.*

これは G が有限群の時, $s \in S$ を取ると, s はモニック多項式 $\prod_{g \in G}(t - gs) \in A[t]$ の根であるから S が A 上整になることと, 次の有名な Artin–Tate の補題から明らかである.

補題 3.12. R がネーター環, S' が R 上有限型な代数, A' は S' の部分 R 代数で, S' は A' 上整とする. このとき, A' は R 上有限型である.

証明は例えば教科書 [AM, Proposition 7.8] を見よ.

次は群に制限を加えるのではなく, その作用の仕方に制限を加えた結果を紹介する.

定義 3.13. G スキームの間の射 $f : X \to Y$ が**幾何学的商**であるとは,

1 Y には G は自明に作用している.

2 f は G-morphism, つまり, $f(gx) = gf(x)$.

3 f は全射で submersive, つまり, $U \subset Y$ について, U が open $\iff$ $f^{-1}(U)$ が open.

4 自然な射 $\mathcal{O}_Y \to (f_*\mathcal{O}_X)^G$ は同型.

5 $\Psi : G \times X \to X \times_Y X$ $(\Psi(g, x) = (gx, x))$ は上への写像.

例 3.14. G スキームの間の射 $f : X \to Y$ が**主 G バンドル**とは, 上の **1**, **2** がみたされ, f は忠実平坦, 上の **5** の Ψ が同型であることをいう. f が主 G バンドルで X がネーターならば f は幾何学的商.

例 3.15. $R = k$ は代数的閉体, G は幾何学的簡約群, S は k 上有限型とする. $X = \operatorname{Spec} S$, $Y = \operatorname{Spec} S^G$, $f : X \to Y$ は自然な射とする. このとき, f が幾何学的商である必要十分条件は, 任意の閉点 $x \in X$ に対して, 集合論的な意味で $Gx = f^{-1}(f(x))$ が成立することである (例えば, [Ne, Chapter 3, section 3] 参照). 標語的だが, (R, G, X, Y が上の時) 幾何学的商とは, 各ファイバーがひとつの軌道になっていること, と覚えて良い.

例 3.16. 上の例で G が有限群ならば, 条件は自動的にみたされ, f は幾何学的商である.

次は Fogarty [Fo2] によって述べられた.

定理 3.17 (Fogarty). この定理では G の平坦性の仮定を外す. R が優秀環, G は連結ファイバーを持つとする. $f : X \to Y$ は幾何学的商で, X は R 上有限型とする. このとき,

1 Y は R 上有限型.

2 $\mathcal{M}$ が連接 $(G, \mathcal{O}_X)$ 加群ならば, $(f_*\mathcal{M})^G$ は連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群である.

この定理の Fogarty による証明は筆者には理解できない. 定理の正しさも**保証できない**. しかしながら, Fogarty の証明の内の分かる部分にアイデアを得, さらに小野田による結果を利用して, 次を得た [Has3].

定理 3.18. $f : X \to Y$ が幾何学的商で universally submersive (つまり, 任意の base change が submersive), X は R 上有限型とする. このとき,

1 Y は R 上有限型.

2 $\mathcal{M}$ が連接 $(G, \mathcal{O}_X)$ 加群ならば, $(f_*\mathcal{M})^G$ は連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群である.

4 有限生成性その 2, Hilbert の第 14 問題

1900 年のパリにおける国際数学者会議において, Hilbert は「数学の諸問題」なるタイトルで招待講演を行ない, そこで 23 個の問題を提出した. その 14 番目が Hilbert の第 14 問題, というわけである.

次が Hilbert の第 14 問題である.

問題 4.1 (Hilbert). k は体, $S' = k[x_1, \ldots, x_n]$ は多項式環とする. L は k と $Q(S') = k(x_1, \ldots, x_n)$ の中間体とするとき, $L \cap S'$ は k 上有限生成代数か.

注意 4.2. Hilbert の第 14 問題には, いくつかのバージョンがある.

1 代数群 G が S' に**線型に** (つまり線型変換で) あるいは任意に作用し, $L = Q(S')^G$ (したがって $L \cap S' = (S')^G$) の場合.

2 k は標数 0 で, D は S' の三角な, 局所ベキ零な, あるいは任意の k 導分で, $L = Q(S')^D$ (したがって $L \cap S' = (S')^D$) の場合.

3 無制限 . . .

上の **1** の, しかも線型作用の場合を**本来の Hilbert の第 14 問題**と呼ぶ [Na4]. 現在では, **上のすべての場合に反例**があり, 問題の焦点はどんな場合に成り立つか (または成り立たないか) に移っているが, 最初の反例が永田雅宜によって提出されるまで, 成り立つのではないかと思っていた人が多かったそうである.

この問題に関して, まずは Zariski による肯定的な部分的結果 [Za] から紹介しよう.

定理 4.3 (Zariski). k は体, B は k 上有限生成整閉整域, F は体で, $k \subset F \subset Q(B)$ で $\mathrm{trans.deg}_k F \leq 2$ ならば, $F \cap B$ は k 上有限生成.

この定理により, (無制限の) Hilbert の第 14 問題は $n \leq 2$ では正しい.

また, 標数 0 の体 K と K の導分 D について, K^D は K で代数的に閉じている (分離代数拡大で導分は一意的に延長されるから). このことから次 [NN] も従う.

系 4.4 (Nowicki – 永田雅宜). k は標数 0 の体, S' は n 変数多項式環, $n \leq 3$, D は S' の k 導分ならば, $(S')^D$ は k 上有限生成.

また, 次も分かる.

系 4.5. $R = k$ は体, S は n 変数多項式環, $n \leq 3$, G はk 上の代数群で S に作用するとする. このとき S^G は有限生成.

証明. k は閉体として良い. $L = Q(S)^G$ の k 上の超越次数が 2 以下ならば定理 4.3 に訴えれば良いし, そうでなければ仮定により $Q(S)/L$ は有限次 Galois 拡大で Galois 群 H は (抽象群) G の準同型像で, S に作用する. $S^G = S^H$ なので, 補題 3.11 により, S^G は有限生成. □

次に, 永田雅宜による, Hilbert の第 14 問題への最初の反例を紹介する. この反例は本来の Hilbert の第 14 問題への反例にもなっていた.

例 4.6 (永田雅宜 [Na1]). 任意の標数について, その標数を持つ代数的閉体 $R = k$ と k 上 32 変数多項式環 S への $G = \mathbb{G}_a^{13}$ の線型な作用があって, S^G は k 上有限生成ではない.

この例と同様にして構成される線型作用の系列を向井茂は「永田型」と名付け, 標数 0 で詳しく調べ, 次の反例を得た [Mu3, Mu4].

例 4.7 (向井茂). $R = \mathbb{C}$ 上 18 変数多項式環 S への $G = \mathbb{G}_a^3$ の線型な作用があって, S^G は $\mathbb{C}$ 上有限生成ではない.

上の例により, G が 3 次元で本来の Hilbert の第 14 問題に反例があることが分かったが, 次が知られている.

定理 4.8 ((Maurer –) Weitzenböck の定理). $R = k$ が標数 0 の体の時, 多項式環 S への $G = \mathbb{G}_a$ の線型な作用による不変式環は有限生成である.

証明は例えば [Do] をご覧下さい.

そこで $\mathbb{G}_a^2$ の多項式環への線型作用による不変式環は有限生成か, ということが気になるが, これは未解決である. 永田型作用の場合には Castravet – Tevelev によって肯定的に解決している [CT]. また, (Maurer –) Weitzenböck の定理が正標数で正しいか, という問も気になるが, これも未解決である. 但し, Fauntleroy [Fa] による部分的結果がある.

次に導分の constant subring に関する Hilbert の第 14 問題を見ていこう.

定義 4.9. 環 S' の導分 D が**局所ベキ零**とは, 任意の $f \in S'$ について, ある $n = n(f)$ が存在して, $D^n(f) = 0$ となることをいう.

注意 4.10. 標数 0 の体 k と k 代数 S' について, S' の局所ベキ零 k 導分 D を与えることと, $\mathbb{G}_a$ の S' への作用を与えることは同じである. D が与えられたとき, 余作用 $S' \to S' \otimes k[T]$ を

$$f \mapsto \sum_{i \geq 0} (D^i f / i!) \otimes T^i$$

で定義すれば良い. 早い話, $t \in \mathbb{G}_a$ が $\exp(tD) = 1 + tD + t^2 D^2/2 + \cdots$ (個々の S' の元に作用するときは局所ベキ零性により実質有限和である) で S' に作用する, と定義すれば良い. 逆に $\mathbb{G}_a$ が S' に作用する時, 余作用を

$$f \mapsto \sum_i f_i \otimes T^i$$

だとすれば, $D(f) = f_1$ とおけば D は局所ベキ零 k 導分になり, この対応は１対１となる. また, このとき, $(S')^{\mathbb{G}_a} = (S')^D$ であることは定義から明らかだろう.

定義 4.11. $k[x_1, \ldots, x_n]$ の k 導分 D が三角 (triangular) とは, $D(x_i) \in k[x_1, \ldots, x_{i-1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ をみたすことをいう.

三角ならば局所ベキ零である. 次の例は三角導分の constant subring が有限生成にならない最初の例である (そのことは [Ro] には書かれていない).

例 4.12 (P. Roberts [Ro]). $R = k$ は標数 0 の体, $S = k[X, Y, Z, Q, T, U, V]$ は 7 変数多項式環, $t \geq 2$,

$$D = X^{t+1} \frac{\partial}{\partial Q} + Y^{t+1} \frac{\partial}{\partial T} + Z^{t+1} \frac{\partial}{\partial U} + (XYZ)^t \frac{\partial}{\partial V}$$

とするとき, D は S の三角 k 導分で, constant subring S^D は有限生成ではない.

上の S^D は $\mathbb{G}_a$ の作用による不変式環でもあるのに有限生成ではない. 線型作用の場合と様子が違うことが分かる. この例は $2n+1$ 変数多項式環 $k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z]$ 上の三角 k 導分

$$D_{(t,n)} = \sum_i x_i^{t+1} \frac{\partial}{\partial y_i} + (x_1 \cdots x_n)^t \frac{\partial}{\partial z}$$

に一般化して調べられた. $t \geq 2$ の $D_{(t,3)}$ が Roberts の例である. 蔵野 [Kura] は $D_{(1,3)}$ による constant subring は有限生成になることを示した. 小島・宮西 [KM] は $t \geq 2$ の $n \geq 3$ で constant subring の非有限生成を示した. 黒田 [Kuro2] は $t \geq 2$, $n \geq 3$ の場合に加え, $t = 1$, $n \geq 4$ の場合にも constant subring が有限生成にならないことを示している.

Roberts の 7 変数での反例は変数の個数を減らす工夫を重ねられ, Freudenburg [Fr1] による 6 変数での反例を経て, 次に至った.

例 4.13 (Daigle - Freudenburg [DF]). 標数 0 の体 $R = k$ 上 $G = \mathbb{G}_a$ の $S = k[x_1, \ldots, x_5]$ への次の三角導分 D から来る作用について, S^G は有限生成でない.

$$D = x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_3} + (x_1 x_3 + x_2) \frac{\partial}{\partial x_4} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_5}$$

導分の constant subring に関する Hilbert の第 14 問題は, 変数の個数でいえば系 4.4 と 例 4.13 により, 4 変数の場合が焦点となる.

事実 4.14. 標数 0 の体 k 上 4 変数多項式環 $S' = k[x_1, x_2, x_3, x_4]$ の k 導分 D について,

- (Daigle – Freudenburg [DF2]) D が三角ならば, $(S')^D$ は有限生成.
- (黒田茂 [Kuro4]) $(S')^D$ が有限生成でない k 導分 D が存在する.
- (黒田茂 [Kuro1]) D が局所ベキ零で各 i について $D(x_i)$ が単項式 (の定数倍) ならば $(S')^D$ は有限生成.
- D が局所ベキ零の時, $(S')^D$ が一般に有限生成かは未解決.

無制限の Hilbert の第 14 問題には黒田茂によって $n = 3$ での反例が与えられ [Kuro3], $n \geq 3$ で反例あり, $n \leq 2$ で反例無し, と決着がついた.

標数 0 での代数群 G の n 変数多項式環 S への線型作用について S^G が有限生成ではない n の最小記録も次々に塗り替えられている. 永田雅宜 [Na1] 32 変数, A'Campo-Neuen [AN] 19 変数, Steinberg [Ste] 18 変数, 向井茂 [Mu4] 16 変数, 谷本龍二 [Ta] 13 変数となり, 現在での最小は Freudenburg [Fr2] 11 変数となっている.

5 ネーター性

R 上の有限生成環はネーター環なので, 不変式環のネーター性の重要な部分は有限生成性に押し付けられてしまう面はあるが, ここでは, 不変式環のネーター性について, 有限群に関する結果を中心に紹介する.

まず, 次は基本的である.

補題 5.1. ネーター環の純部分環はネーターである. 特に, S が Reynolds 作用素を持てば A はネーターである.

証明. S' がネーター環, A' がその純部分環とする. $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ が A' のイデアルの昇鎖とする. $I_1S' \subset I_2S' \subset \cdots$ はネーター環 S' のイデアルの昇鎖なので停留する. 純部分環であることから $A'/I_j \to S'/I_jS'$ は単射. よって $I_jS' \cap A' = I_j$ なので, 元の昇鎖も停留する. □

系 5.2. G が有限群で S に G が作用するとする. S が $(\#G)^{-1}$ を含むとき, A はネーター環.

証明. $R = \mathbb{Z}[(\#G)^{-1}]$ として良い. このとき G は Reynolds 作用素を持つから, 補題によって A はネーター. □

G が有限群だとしても一般に $A = S^G$ はネーターとは限らない.

例 5.3 (永田雅宜 [Na5]). 体 K 上有限次元代数 S への有限群 G の作用で $A = S^G$ がネーターでないものがある (無論この作用は K 作用ではない).

構成. p は素数, $K := \mathbb{F}_p(x_1, x_2, \ldots)$, $D := \sum_{i=1}^{\infty} x_{i+1}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $k := K^D = \mathbb{F}_p(x_1^p, x_2^p, \ldots)$, $S := K[t]/(t^2)$, $G := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \langle \sigma \rangle$ とする. $\sigma(a + bt) = a + (b + Da)t$ $(a, b \in K)$ とすると, G は S に作用する. $S^G = k + Kt$ で $[K : k] = \infty$ なので, S^G はネーターではない. □

この例を観察することによって, Fogarty は強力な肯定的結果を得た [Fo1].

定理 5.4 (Fogarty). 有限群 G がネーター R 代数 S に R 作用していて, G の位数を割る任意の素数 p に対して, 微分加群 $\Omega_{(S/pS)/(R/pR)}$ が S 加群として有限生成ならば,

1. S は $A := S^G$ 加群として有限生成である.
2. A はネーター環である.
3. G の位数を割る任意の素数 p に対して, 微分加群 $\Omega_{(A/pA)/(R/pR)}$ は A 加群として有限生成である.

正標数の環拡大に対する微分加群の有限生成性は次のように特徴づけられる [Fo1].

定理 5.5 (Fogarty). 標数 p のネーター環の射 $B \to C$ について次は同値.

1 $\Omega_{C/B}$ が C 加群として有限生成.

2 C が $B[C^p]$ 加群として有限生成.

標数 p の可換環 B が F **有限**であるとは, B が B^p 加群として有限生成であることをいう. 上の定理の条件 **2** は C が F 有限という条件よりも弱い. 完全体は F 有限である. 剰余体が F 有限なネーター完備局所環は F 有限である. F 有限なネーター環上本質的に有限型な環は F 有限である. 応用上重要な標数 p のネーター環は大抵 F 有限だといって良いのではないか. F 有限な標数 p のネーター環は Krull 次元有限の優秀環である [Kun].

系 5.6 (定理 5.4 の系). 有限群 G が F 有限な標数 p のネーター環 S に作用するとき, 不変式環 S^G も F 有限なネーター環であり, S は S^G 加群として有限生成である.

また, 定理 5.4 は系 5.2 の一般化でもあることに注意する.

6 正規性と UFD

次は (少なくとも G が代数閉体上のアフィン代数群の場合などには) 大変良く知られている.

補題 6.1. S が整閉整域 (resp. 整閉整域の有限直積) ならば, S^G もそうである.

上記の主張の証明は [Has5, (32.6)] 参照.

上が成り立つので, あまり必要ないといえばそれまでだが, 次が成立することも示される [HR, Proposition 6.15].

補題 6.2. A' が整閉整域 S' の純部分環ならば, A' は整閉整域.

良く知られているように, 正規 $=(R_1)+(S_2)$ であるが, (R_1) も, (S_2) も, (S_1) も, $\mathbb{G}_m$ の作用による不変式環に遺伝しない例がある.

S が整域とし, $\omega : S \to S \otimes_R R[G]$ を余作用とする. 商体 $Q(S)$ の元 a/b が G **不変** であるとは,

$$(a \otimes 1)\omega(b) = (b \otimes 1)\omega(a)$$

が $S \otimes R[G]$ で成立することをいう [Mu2, 定義 6.1]. G 不変な $Q(S)$ の元全体を $Q(S)^G$ と書くと, $Q(S)^G$ は $Q(S)$ の部分体であり, 不変関数体とも呼ばれる (別に $Q(S)$ に G の作用が伸びる, とまでは言っていない). S が**イタリア的要請**をみたすとは, $Q(S)^G = Q(A)$ であることを言う.

UFD については次が基本的である (少し形が違うが, 同様の主張が [Ho2] に見られる).

定理 6.3. $R = k$ は体で, G が非自明な指標 (i.e., 1 次元表現) を持たない代数群とする. S が UFD で $S^\times = k^\times$ ならば, $A = S^G$ は UFD で, この作用はイタリア的要請をみたす.

$G \otimes \bar{k}$ の根基がユニポテントならば, G は非自明な指標を持たない. 特に, 半単純群およびユニポテント群は非自明な指標を持たない.

$S^\times = k^\times$ は多項式環の場合にみたされるが, その仮定を除いた場合, G が連結のときに次のようなことが分かる.

定理 6.4. $R = k$, G が連結代数群で, $G \otimes_k \bar{k}$ は非自明な指標を持たないとする. S は k 上有限型な整域とする. もし任意の G-stable な S の高さ 1 の素イデアルが単項ならば,

1 $S^\times = A^\times$, ここに $A = S^G$.

2 G-stable な S の高さ 1 の素イデアルは $A \setminus \{0\}$ の元で生成される.

3 $f \in S \setminus (S^\times \cup \{0\})$ について, Sf の任意の極小素因子が G-stable であることと, $f \in A$ は同値である.

4 A は UFD である.

5 A の素元は S の素元である.

6 この作用はイタリア的要請をみたす.

イタリア的要請というのはどちらかというと幾何的な条件なので, それが非自明な指標を持たない群の作用という条件から出るのは面白い.

7 Cohen–Macaulay 環

Cohen–Macaulay 性と Gorenstein 性は現代的可換環論の中心的な役割を果たしてきた概念である.

定義 7.1. $(B, \mathfrak{m}, k)$ が d 次元ネーター局所環とする.

1. 有限生成 B 加群 M が **極大 Cohen–Macaulay (MCM)** とは, $\mathrm{Ext}^i_B(k, M) = 0$ $(i < d)$ をみたすことをいう.

2. B が **Cohen–Macaulay 局所環**とは, B 加群 B が MCM であることをいう.

3. B が **Gorenstein 局所環**とは, B 加群 B の入射次元が有限であることをいう.

定義 7.2. C がネーター環の時, C が Cohen–Macaulay, あるいは Gorenstein であるとは, 任意の C の極大イデアルによる局所化がそうであることをいう. X がネータースキームとする. X の各局所環が Cohen–Macaulay あるいは Gorenstein であるとき, X がそうであるという.

定義 7.3. 標数 0 の体上本質的有限型の正規スキーム X が有理特異点を持つとは, ある特異点解消 $\pi : \tilde{X} \to X$ で $R^i \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} = 0$ $(i > 0)$ であることをいう.

ネーター環 R について, R のどの極小素因子にも属さない R の元全体を R° で表す.

定義 7.4 ([HH1], [FW]). p が素数, R が標数 p のネーター環, I が R のイデアルとする. 素数巾 $q = p^e$ に対して, $\{x^q \mid x \in I\}$ で生成される R のイデアルを $I^{[q]}$ で表す.

$$I^* := \{x \in R \mid \exists c \in R^\circ \ \forall q \gg 0 \ cx^q \in I^{[q]}\}$$

とおき, I^* を I の密着閉包という. $I = I^*$ の時, I は密着的閉という. R の任意のイデアル I が密着的閉の時, R は弱 F 正則という. R の任意の素イデアル P による局所化 R_P が弱 F 正則の時, R は F 正則という. また, 任意の $h \geq 0$ に対して, h 個の元で生成される高さ h のイデアルが密着的閉の時, R は F 有理という.

R が正則ならば Gorenstein, Gorenstein ならば Cohen–Macaulay である ([Ma] 参照). また, 標数 0 の体上の代数多様体 X について, X が正則ならば有理特異点を持ち, 有理特異点を持てば Cohen–Macaulay normal である ([Is] 参照). 素数標数のネーター環について, 正則ならば F 正則, F 正則ならば弱 F 正則, 弱 F 正則ならば F 有理, F 有理ならば正規, また, F 有理かつ優秀環ならば Cohen–Macaulay である ([HH1], [HH2], [Ve] 参照).

不変式環の Cohen–Macaulay 性と言えば, Hochster–Roberts による次の定理 [HR] がこの方向の研究を大きく前進させた大定理だといえる.

定理 7.5. $R = k$ は体, G は k 上の線形簡約な線形代数群とする. S が正則環ならば, A は Cohen–Macaulay.

定理の仮定の下でも, 次元などのもっと基本的なことに関して, 殆んど何も言えないくらいめちゃくちゃなのに, Cohen–Macaulay 性だけは言えているというのは何とも不思議な限りである. この定理は次のような形で一般化されている.

定理 7.6 (Hochster–Huneke [HH3]). S' が体を含む正則環で A' が S' の純部分環ならば A' は Cohen–Macaulay である.

G が線形簡約なら S は Reynolds 作用素を持つから一般化になっている. また, 標数 0 の体上有限型の S に限れば, 次が優れた一般化になっている.

定理 7.7 (Boutot [Bou]). S' が標数 0 の体 k 上本質的に有限型な代数で, A' は S' の純部分環である, k 上本質的に有限型な, S' の k 部分代数とする. このとき, S' が高々有理特異点を持てば A' も高々有理特異点を持つ.

正標数で Boutot の定理に相当するものとして, 次がある.

補題 7.8. S' が F 正則な素数標数のネーター環, A' が S' の純部分環ならば, A' も F 正則である.

証明は (本質的には [HH1, (4.12)] であるが) [HO, Corollary 9.11] 参照. Boutot の定理は Grauert–Riemenschneider 消滅 (の Hartshorne–Ogus によるバージョン) に頼っていて大変易しいとは思わないが, この補題は何の道具もなしに, 容易に示されてしまう.

尚, 有理特異点の標数 p における対応物というのは, F 正則ではなく, F 有理であると考えられる. 実際, 標数 0 の体 k 上有限型の代数 A が有理特異点を持つためには, A が F 有理型である, つまりある $\mathbb{Z}$ 上有限生成な k の部分環 R と有限生成 R 代数 A_R があって, $A \cong k \otimes_R A_R$ で, R の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について, $R/\mathfrak{m} \otimes_R A_R$ が F 有理である, ことは同値であることが知られている [Sm], [Har]. しかしながら, 補題 7.8 で F 正則を F 有理に置き換えた主張が成り立たない反例が渡辺敬一によって示されている [Wa3].

補題 7.8 の系として, S が素数標数で F 正則で, G が線形簡約ならば, A は F 正則と分かる. しかし, この系は大したことは言っていない. それは, 次の通り, 正標数では線形簡約群は非常に限られているからである.

定理 7.9 (永田雅宜 [Na2]). $R = k$ は素数標数 p の閉体, G は線形代数群とする. 次は同値である.

1. G は線形簡約.
2. 単位連結成分 G° はトーラスで, 有限群 G/G° の位数は p で割れない.

それでは正標数の簡約群 G について, A はどれくらい Cohen–Macaulay になるのか, ということが問題になる. 歴史的には, 良く知られた正標数の簡約群の作用による不変式環は大抵 Cohen–Macaulay だった. Hochster–Roberts の論文 [HR] に具体例が多く掲げられていて, 標数 0 では彼らの定理で Cohen–Macaulay 性が証明でき, 正標数での Cohen–Macaulay 性は個別の議論で分かる, という具合いだった. しかし, Kemper [Ke] が次の定理を提出して事態は一変した.

定理 7.10 (Kemper). $R = k$ は閉体, G は幾何学的簡約ではあるが線形簡約では無い線形代数群とする. このとき, ある有限次元 G 加群 V が存在して, $k[V]^G$ は Cohen–Macaulay ではない.

上の定理で G が幾何学的簡約であることは重要である. 例えば, $k = \mathbb{C}$, $G = \mathbb{G}_a$ とすると, 任意の有限次元 G 加群 V について, $k[V]^G$ は**有限生成**で (Weitzenböck の定理, 定理 4.8), 高々有理特異点を持つ UFD になる.

これですべてが絶望になったかというと, そうでもない. 良く知られた不変式環の例で Cohen–Macaulay になるものが実際に沢山あるからである.

定義 7.11. $R = k$ は閉体, G は簡約群とし, G の Borel 部分群 B を固定する. G 加群 V が**良いフィルター付け**を持つとは, 任意の 1 次元 B 加群 λ に対して, $H^1(G, V \otimes \mathrm{ind}_B^G \lambda) = 0$ が成立することをいう (この定義は B の取り方によらない). ここに ind_B^G は制限関手 $\mathrm{res}_B^G : \mathrm{Mod}(G) \to \mathrm{Mod}(B)$ の右随伴関手である ([Ja, (I.3.3), (I.3.4)] 参照).

良いフィルター付けは簡約群の表現論の基本概念である. 教科書 [Ja] に詳しい解説がある.

ここまでに挙げてきた A の Cohen–Macaulay 性に関する定理は A が S の純部分環の場合にのみ有効であったが, 次はそうでない場合にも有効である.

定理 7.12 ([Has2]). $R = k$ は正標数の閉体, G は簡約群, V は有限次元 G 加群とする. もし $S = k[V]$ が G 加群として良いフィルター付けを持つならば, $A = S^G$ は F 正則である.

k が標数 0 の時, $H^1(G, ?) = 0$ なので, 任意の G 加群は良いフィルター付けを持つ. また, 一般のネーター環の上の簡約群スキームの表現の良いフィルター付けの話 [Has1] を利用すると次が分かる.

注意 7.13. R がネーター環, G が簡約群スキーム, V が R 加群として有限

生成射影的な G 加群とするとき, $S = R[V]$ の "good locus"

$$U := \{P \in \operatorname{Spec} R \mid S \otimes_R \overline{\kappa(P)} \text{ は } G \otimes_R \overline{\kappa(P)}\text{-module として良いフィルター付けを持つ}\}$$

は $\operatorname{Spec} R$ で **Zariski open** である. $P \in U$ なら, $S^G \otimes \kappa(P) (\cong (S \otimes \kappa(P))^G)$ は Cohen–Macaulay である. $R = \mathbb{Z}$ のとき, S/pS が良いフィルター付けを持たない素数 p は有限個である.

要するに S が良いフィルター付けを持つ標数の方が多数派なのである. 特に $R = k$ が標数 0 の体の時, S^G は F-regular type であることも従うが, この事実自身は Boutot の定理から比較的容易に従う.

また, 次の例により, 不変式環が F 正則になる例が得られるが, 古典的に Cohen–Macaulay 性が知られている不変式環の内のいくつか (例えば determinantal rings, Grassmann 多様体の座標環等) は, この例の特別な場合になっている.

例 7.14. $R = k$ は正標数, $Q = (Q_0, Q_1, h, t)$ は有限箙, $d : Q_0 \to \mathbb{N}$ は dimension vector とする. 各 $i \in Q_0$ に対して, $V_i := k^{d(i)}$ とする. G_i は次のいずれかの $GL(V_i)$ の部分群とする.

1 $GL(V_i)$, $SL(V_i)$, $PSL(V_i)$.

2 $Sp_{d(i)}$ ($d(i)$ は偶数).

3 $SO_{d(i)}$ (k は標数 2 でない場合のみ).

4 以上の Levi 部分群.

5 自明な群.

$G = \prod_{i \in Q_0} G_i$ とおき, $V := \prod_{\phi \in Q_1} \operatorname{Hom}(V_{t(\phi)}, V_{h(\phi)})$ とする. このとき, $k[V]$ は G 加群として良いフィルター付けを持ち, $k[V]^G$ は F 正則である.

話題をかえて, 有限群の不変式環に目を転じよう.

定理 7.15 (Hochster–Eagon [HE] 等). $R = k$ は体, G が線形簡約有限群スキームのとき, S が Cohen–Macaulay (resp. 正標数で F 有理) ならば, $A = S^G$ もそうである.

Hochster–Eagon の論文 [HE] では有限群に関する結果を示しているが, 不変式環の Cohen–Macaulay 性に関する定理としてはもっとも古いものと思われる.

上の線形簡約有限の有限の条件は外せない. $G = \mathbb{G}_m$ の時, G は線形簡約であるが, S が Cohen–Macaulay でも A がそうでない例がいくらでもある. 実際, 川崎健は, 任意の体上有限生成整域 A に対して, ある体上有限生成 Cohen–Macaulay 整域 S で $G = \mathbb{G}_m$ の作用を持つものが存在して, $A = S^G$ であることを示している (arithmetic Macaulayfication [Ka]). F 有理性についても, 先に触れた渡辺敬一の例 [Wa3] は S が F 有理で, $\mathbb{G}_m$ の作用を受け, S^G が F 有理でない例になっている.

Hochster–Eagon の結果は次のように拡張されている (厳密には, Hochster–Eagon の定理で, 考える環が体を含む場合には一般化になっているというだけで, 真の一般化ではない).

定理 7.16 (橋本–大渓正浩 [HO]). $R = k$ は体, G は線形簡約, $f : X \to Y$ は幾何学的商でアフィン射, X はネーターで Cohen–Macaulay とする. このとき, Y はネーターで Cohen–Macaulay.

8 Gorenstein 性など

Gorenstein 性については次が知られている.

定理 8.1 (渡辺敬一, Stanley, 橋本等). $R = k$ は体, G は線形簡約で, V は有限次元 G 加群で $\bigwedge^{\mathrm{top}} V$ は自明表現とする. もし, G が有限群スキーム, トーラス, 半単純群のいずれかであれば, $k[V]^G$ は Gorenstein である.

有限群の場合は渡辺敬一 [Wa1], トーラスの場合は Stanley [Sta], 被約とは限らない有限群スキームの場合は橋本 [Has5] による. 半単純群の場合は不変式環が体上有限生成な Cohen–Macaulay UFD になることから Gorenstein 性が出る [Mur] ので, あえて言うなら Cohen–Macaulay 性を示した Hochster–Roberts [HR] の結果, ということになるだろうか. (標数 0 の) 線形簡約群はある意味半単純群, トーラス, 有限群を組み合わせて出来ているので, この定理からの類推で, 一部の人が G が標数 0 の線形簡約群の時に, $\bigwedge^{\mathrm{top}} V$ が自明表現ならば, $k[V]^G$ は Gorenstein だろう, と予想していた時期があったが, それは Knop によってあっさりと否定された [Kn]. それにとどまらず, Knop は一般の標数 0 の線形簡約群の作用による不変式環の Gorenstein 性について良い十分条件を示した.

定理 8.2 (Knop [Kn]). $R = k$ は標数 0 の閉体, G は線形代数群で G° は簡約群, S は k 上有限型な高々有理特異点を持つ UFD, $f : X \to Y$ は $S^G \hookrightarrow S$ に付随する自然な射とする.

$$X^{(0)} := \{x \in X \mid G_x \text{ は有限}\}$$

とおく. 次の条件が成立するとき, S^G は Gorenstein.

1 イタリア的要請をみたす. つまり $Q(S)^G = Q(S^G)$.

2 $\operatorname{codim}_X(X \setminus X^{(0)}) \geq 2$.

3 (G, S) 加群として, $\omega_S \otimes_k \bigwedge^{\mathrm{top}} \operatorname{Lie} G \cong S$.

幾何的な条件 **1, 2** をうまく挿入した点と, **3** の条件で単に $\omega_S \cong S$ ではないことを見抜いた点が素晴らしい. G が有限群, 半単純群, トーラスのいずれでも $\bigwedge^{\mathrm{top}} \operatorname{Lie} G$ は自明になってしまう.

次は有限群の線型作用による不変式環の正則性に関する有名な定理を紹介する.

k を体とし, $\sigma \in GL(n, k)$ とする. σ が鏡映 (reflection) であるとは, $\operatorname{rank}(\sigma - E_n) = 1$ であることを言う. ここに, E_n は単位行列である. G は $GL(n, k)$ の有限部分群とする. G が鏡映群であるとは, G が鏡映で生成されることを言う.

定理 8.3 (Shephard–Todd [ST], Chevalley [Ch]). G が $GL(n, k)$ の線形簡約有限部分群とする時, 次は同値.

1 A は多項式環.

1' A は正則環.

2 S は A 加群として自由加群.

3 G は鏡映群.

完交環については何も述べることが出来なかった. 有限群の多項式環への線型作用については 中島晴久, 渡辺敬一, Gordeev などによる素晴らしい研究があり, [Wa4] で解説されているのでご覧下さい.

References

[AN] A. A'Campo-Neuen, Note on a counterexample to Hilbert's fourteenth problem given by P. Roberts, *Indag. Math.* **5** (1994), 253–257.

[AM] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra,* Addison-Wesley (1969).

[Bor] A. Borel, *Linear Algebraic Groups,* 2nd ed., Graduate Texts in Math. **126**, Springer (1991).

[Bou] J.-F. Boutot, Singularités rationnelles et quotients par les groupes réductifs, *Invent. Math.* **88** (1987), 65–68.

[CT] A.-M. Castravet and J. Tevelev, Hilbert's 14th problem and Cox rings, *Compositio Math.* **142** (2006), 1479–1498.

[Ch] C. Chevalley, Invariants of finite groups generated by reflections, *Amer. J. Math.* **77** (1955), 778–782.

[DF] D. Daigle and G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert's fourteenth problem in dimension 5, *J. Algebra* **221** (1999), 528–535.

[DF2] D. Daigle and G. Freudenburg, Triangular derivations of $k[X_1, X_2, X_3, X_4]$, *J. Algebra* **241** (2001), 328–339.

[Do] I. Dolgachev, *Lectures on Invariant Theory, London Mathematical Society Lecture Note Series* **296**, Cambridge (2003).

[Ev] L. Evens, The cohomology ring of a finite group, *Trans. Amer. Math. Soc.* **101** (1961), 224–239.

[Fa] A. Fauntleroy, On Weitzenböck's theorem in positive characteristic, *Proc. Amer. Math. Soc.* **64** (1977), 209–213.

[FW] R. Fedder and K.-i. Watanabe, A characterization of F-regularity in terms of F-purity, *Commutative Algebra* (Berkeley, CA, 1987), Springer (1989), pp. 227–245.

[Fo1] J. Fogarty, Kähler differentials and Hilbert's fourteenth problem for finite groups, *Amer. J. Math.* **102** (1980), 1159–1175.

[Fo2] J. Fogarty, Geometric quotients are algebraic schemes, *Adv. Math.* **48** (1983), 166–171.

[Fr1] G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert's fourteenth problem in dimension six, *Tronsform. Groups* **5** (2000), 61–71.

[Fr2] G. Freudenburg, A linear counterexample to the fourteenth problem of Hilbert in dimension eleven, *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (2007), 51–57.

[Hab] W. Haboush, Reductive groups are geometrically reductive, *Ann. of Math. (2)* **102** (1975), 67–83.

[Har] N. Hara, A characterization of rational singularities in terms of injectivity of Frobenius maps, *Amer. J. Math.* **120** (1998), 981–996.

[Has1] M. Hashimoto, *Auslander-Buchweitz Approximations of Equivariant Modules, London Mathematical Society Lecture Note Series* **282**, Cambridge (2000).

[Has2] M. Hashimoto, Good filtrations of symmetric algebras and strong F-regularity of invariant subrings, *Math. Z.* **236** (2001), 605–623.

[Has3] M. Hashimoto, "Geometric quotients are algebraic schemes" based on Fogarty's idea, *J. Math. Kyoto Univ.* **43** (2003), 807–814.

[Has4] M. Hashimoto, A pure subalgebra of a finitely generated algebra is finitely generated, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), 2233–2235.

[Has5] M. Hashimoto, Equivariant twisted inverses, *Foundations of Grothendieck Duality for Diagrams of Schemes,* (J. Lipman, M. Hashimoto), Lecture Notes in Math. **1960**, Springer, pp. 263–474, to appear.

[HO] M. Hashimoto and M. Ohtani, Local cohomology of diagrams of schemes, *Michigan Math. J.* **57** (2008), 383–425.

[Ho1] M. Hochster, Rings of invariants of tori, Cohen–Macaulay rings generated by monomials, and polytopes, *Ann. of Math. (2)* **96** (1972), 318–337.

[Ho2] M. Hochster, Invariant theory of commutative rings, *Group Actions on Rings* (Brunswick, ME, 1984), *Contemp. Math.* **43**, AMS (1985), pp. 161–179.

[HE] M. Hochster and J. A. Eagon, Cohen–Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfections of determinantal loci, *Amer. J. Math.* **93** (1971), 1020–1059.

[HH1] M. Hochster and C. Huneke, Tight closure, invariant theory, and Briançon–Skoda theorem, *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), 31–116.

[HH2] M. Hochster and C. Huneke, F-regularity, test elements, and smooth base change, *Trans. Amer. Math. Soc.* **346** (1994), 1–62.

[HH3] M. Hochster and C. Huneke, Applications of the existence of big Cohen–Macaulay algebras, *Adv. Math.* **113** (1995), 45–117.

[HR] M. Hochster and J. Roberts, Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay, *Adv. Math.* **13** (1974), 115–175.

[Is] 石井志保子, 特異点入門, Springer (1997).

[Ja] J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups,* Second edition, AMS (2003).

[Ka] T. Kawasaki, On arithmetic Macaulayfication of Noetherian rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **354** (2002), 123–149.

[Ke] G. Kemper, A characterization of lineary reductive groups by their invariants, *Transform. Groups* **5** (2000), 1–8.

[Kn] F. Knop, Der kanonische Modul eines Invariantenrings, *J. Algebra* **127** (1989), 40–54.

[KM] H. Kojima and M. Miyanishi, On Robert's counterexample to the fourteenth problem of Hilbert, *J. Pure Appl. Algebra* **122** (1997), 277–292.

[Kun] E. Kunz, On Noetherian rings of characteristic p, *Amer. J. Math.* **98** (1976), 999–1013.

[Kura] K. Kurano, Positive characteristic finite generation of symbolic Rees algebras and Roberts' counterexamples to the fourteenth problem of Hilbert, *Tokyo J. Math.* **16** (1993), 473–496.

[Kuro1] S. Kuroda, A condition for finite generation of the kernel of a derivation, *J. Algebra* **262** (2003), 391–400.

[Kuro2] S. Kuroda, A generalization of Roberts' counterexample to the fourteenth problem of Hilbert, *Tohoku Math. J.* **56** (2004), 501–522.

[Kuro3] S. Kuroda, A counterexample to the fourteenth problem of Hilbert in dimension three, *Michigan Math. J.* **53** (2005), 123–132.

[Kuro4] S. Kuroda, Fields defined by locally nilpotent derivations and monomials, *J. Algebra* **293** (2005), 395–406.

[Ma] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory,* First paperback edition, Cambridge (1989).

[Mu1] 向井茂, モジュライ理論 1, 岩波 (1998).

[Mu2] 向井茂, モジュライ理論 2, 岩波 (2000).

[Mu3] S. Mukai, Counterexample to Hilbert's fourteenth problem for the 3-dimensional additive group, preprint, RIMS–1343 (2001).

[Mu4] S. Mukai, Geometric realization of T-shaped root systems and counterexamples to Hilbert's fourteenth problem, *Algebraic Transformation Groups and Algebraic Varieties, Encyclopaedia Math. Sci.* **132**, Springer (2004), pp. 123–129.

[Mur] M. P. Murthy, A note on factorial rings, *Arch. Math.* **15** (1964), 418–420.

[Na1] M. Nagata, On the 14-th problem of Hilbert, *Amer. J. Math.* **81** (1959), 766–772.

[Na2] M. Nagata, Complete reducibility of rational representations of a matrix group, *J. Math. Kyoto Univ.* **1** (1961), 87–99.

[Na3] M. Nagata, Invariants of a group in an affine ring, *J. Math. Kyoto Univ.* **3** (1963/1964) 369–377.

[Na4] M. Nagata, *Lectures on the Fourteenth Problem of Hilbert,* Tata Institute of Fundamental Research (1965).

[Na5] M. Nagata, Some questions on rational actions of groups, *Algebraic Geometry,* (Internat Colloq. Tata Inst. Fund. Res., Bombay 1968), Oxford (1969), pp. 323–334.

[NM] M. Nagata and T. Miyata, Note on semi-reductive groups, *J. Math. Kyoto Univ.* **3** (1963/1964), 379–382.

[Ne] P. E. Newstead, *Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces,* Tata Institute of Fundamental Research (1978).

[NN] A. Nowicki and M. Nagata, Rings of constants for k-derivations in $k[x_1, \ldots, x_n]$, *J. Math. Kyoto Univ.* **28** (1988), 111–118.

[Po] V. L. Popov, Hilbert's theorem on invariants, *Soviet Math. Dokl.* **20** (1979), 1318–1322.

[Ro] P. Roberts, An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem, *J. Algebra* **132** (1990), 461–473.

[Se] C. S. Seshadri, Geometric reductivity over an arbitrary base, *Adv. Math.* **26** (1977), 225–274.

[ST] G. C. Shepherd and J. A. Todd, Finite unitary reflection groups, *Canad. J. Math.* **6** (1954), 274–304.

[Sm] K. E. Smith, F-rational rings have rational singularities, *Amer. J. Math.* **119** (1997), 159–180.

[Sp] T. A. Springer, Linear algebraic groups, *Algebraic Geometry IV,* A. N. Parshin and I. R. Shafarevich (eds.), Encyclopedia of mathematical sciences **55**, Springer (1994), pp. 1–121.

[Sta] R. P. Stanley, Hilbert functions and graded algebras, *Adv. Math.* **28** (1978), 57–83.

[Ste] R. Steinberg, Nagata's example, *Algebraic Groups and Lie Groups,* Cambridge (1997), pp. 375–384.

[Ta] R. Tanimoto, Linear counterexamples to the fourteenth problem of Hilbert, *J. Algebra* **275** (2004), 331–338.

[Th] R. W. Thomason, Equivariant resolution, linearization, and Hilbert's fourteenth problem over arbitrary base schemes, *Adv. Math.* **65** (1987), 16–34.

[TvdK] A. Touzé and W. van der Kallen, Bifunctor cohomology and cohomological finite generation for reductive groups, preprint `arXiv:0809.1014v1`.

[vdK] W. van der Kallen, A reductive group with finitely generated cohomology algebras, *Algebraic Groups and Homogeneous Spaces,* V. B. Mehta (ed.), Tata Institute of Fundamental Research (2007).

[Ve] J. D. Vélez, Openness of the F-rational locus and smooth base change, *J. Algebra* **172** (1995), 425–453.

[Wa1] K.-i. Watanabe, Certain invariant subrings are Gorenstein I, *Osaka J. Math.* **11** (1974), 1–8.

[Wa2] K.-i. Watanabe, Certain invariant subrings are Gorenstein II, *Osaka J. Math.* **11** (1974), 379–388.

[Wa3] K.-i. Watanabe, F-rationality of certain Rees algebras and counterexamples to "Boutot's theorem" for F-rational rings, *J. Pure Appl. Algebra* **122** (1997), 323–328.

[Wa4] 渡辺敬一, 有限群の不変式論,「群論の進化」, 朝倉書店 (2004), pp. 135–183.

[Wate] W. C. Waterhouse, Geometrically reductive affine group schemes, *Arch. Math.* **62** (1994), 306–307.

[Za] O. Zariski, Interprétations algébrico-géométriques du quatrozième problème de Hilbert, Bull. Sci. Math. **78** (1954), 155–168.