Recent developments in the log minimal model program II
対数的極小モデル理論の最近の発展についてII

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
藤野 修*

概 要

Birkar-Cascini-Hacon-McKernan の大結果について述べる。数学的に厳密な話ではなく、個人的な感想、極小モデル理論の勉強方法などを中心に述べたい。

目 次

* 〒 464-8602 名古屋市千種区不老町, e-mail: fujino@math.nagoya-u.ac.jp

1 はじめに

この報告書では最近の対数的極小モデル理論の発展について述べたい。2 年前の徳島での講演 [藤 1] の続きである。興味のある方は 2 年前の報告書もあわせて読まれることを勧める。数学的に厳密な話は論説 [藤 2] の方に書いたので、この報告書には [藤 2] の補足と個人的な考えを中心に書きたい。露骨に言うと、論説には不適切な話題を中心に書きたい。といっても、変なことを論じるわけではない。極小モデル理論の勉強方法や専門家の印象などを中心に述べていくつもりである。この拙文が極小モデル理論の研究者を一人でも増やすことを期待する。

いきなり感想から始めると、この 2 年間は本当にたくさんのことがあったと思う。徳島の講演の少し前に [HM] が突然世に現れた。これはやはり専門家にとってはショックの大きな論文であった。そこで展開された議論は、我々専門家にとってはよく知っている議論ばかりであった。Shokurov 氏の証明の枠組み [S2] を踏襲しつつ、Siu[Si] に始まる拡張定理を巧妙に組み合わせることによって、フリップの存在証明を低次元の極小モデル理論に帰着させるという衝撃的な論文であった。テクニックはすべて既存のものかもしれないが、このように組み合わせて使うとは全く想像していなかった。今回の話の中心は大結果 [BCHM] である。残念ながら今回のこの報告書も他人の大結果の宣伝である。この論文 [BCHM] も衝撃的ではあったが、私の個人的な感想を言わせてもらうと、[HM] の方がインパクトがあったと思う。[BCHM] は大結果を述べた論文であるが、既存の (主に Shokurov 氏の) アイデアをガバッとかき集めて来て強引に帰納法が回るようにした、という印象を受ける。もちろんアイデアを実行するのは大変な労力を要することなので、[BCHM] が偉大な論文であることに異論はない。また、[BCHM] の非消滅定理の証明などは、かなり巧妙でなかなか思い付きそうにない話である。最近大結果が多いので、私の感覚は麻痺してきているかもしれない。とりあえず定理を述べよう。[BCHM] の主結果と言って良いであろう。この報告書を通して、多様体はすべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上で定義されているとする。

定理 1 (Birkar-Cascini-Hacon-McKernan) (X, Δ) を川又対数的末端対とする。特に $K_X + \Delta$ は $\mathbb{R}$-カルティエである。$\pi : X \to U$ を擬射影多様体の間の固有射とする。Δ が π-巨大で $K_X + \Delta$ が π-擬有効、または、$K_X + \Delta$ が π-巨大とする。このとき以下が成立する。

(1) $K_X + \Delta$ は U 上対数的末端モデル (対数的極小モデルとも言う) を

もつ。

(2) もし $K_X+\Delta$ が π-巨大なら、$K_X+\Delta$ が U 上の対数的標準モデルを持つ。

(3) もし $K_X+\Delta$ が $\mathbb{Q}$-カルティエなら、$\bigoplus_{m\geq 0}\pi_*\mathcal{O}_X(\llcorner m(K_X+\Delta)\lrcorner)$ は有限生成 $\mathcal{O}_U$-代数である。

専門家以外には分かりにくい主張かもしれないが、高度に発展した現在の極小モデル理論では普通の用語ばかりである。理解不能でも諦めずに次の章に進んでいただきたい。基本的な用語についてもっと詳しく知りたい人には [藤 2] もお勧めである。この報告書は [藤 2] と合わせて読むのが一番良いと思う。

2 章では定理 1 から従う結果のいくつかを述べておく。厳密な取り扱いは無理であるが、雰囲気は味わっていただけると思う。少しくどいかもしれないが、[藤 2] も合わせて読むと良いと思う。3 章は質疑応答形式で書いた。論文内には直接的には書いていないことを中心に、個人的な感想も込めて書いてみた。4 章は文献と勉強法についてまとめてある。[BOOK] の宣伝も兼ねている。一人でも多くの人が極小モデル理論を理解することを願って書いた。最近極小モデル理論の若手が枯渇気味と思う。若い学生さんの極小モデル理論への挑戦を期待する。5 章は単なる私の思い出話である。

謝辞: 科学研究費若手 (A)♯17684001 の援助と稲盛財団からの援助を受けている。感謝する。[BCHM] の解読には高木寛通さん (東大) と川北真之さん (数理研) の助けが大いに役立った。お二人に深く感謝したい。

2 主な系

とりあえずこの章では [BCHM] で得られた主な系を説明する。すべて一般次元の話である。

系 2 X を一般型非特異射影多様体とする。このとき以下が成立する。

(1) X は極小モデルをもつ。つまり、X と双有理同値な射影多様体 X' が存在し、X' は高々$\mathbb{Q}$-分解的末端特異点のみを許し、$K_{X'}$ は数値的正である。

(2) X は標準モデルをもつ。つまり、X と双有理同値な射影多様体 X' が存在し、X' は高々標準特異点のみを許し、$K_{X'}$ は豊富である。

(3) 標準環 $\bigoplus_{m\geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$ は有限生成 $\mathbb{C}$-代数である。

上の系では (1) さえ証明出来れば (2) と (3) は固定点自由化定理から従う。これだけでも凄い結果である。

系 3 (X, Δ) を川又対数的末端対とする。ただし、X は射影多様体で Δ は X 上の有効 $\mathbb{Q}$-因子とする。もちろん $K_X + \Delta$ は $\mathbb{Q}$-カルティエである。このとき、対数的標準環 $\bigoplus_{m\geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(\llcorner m(K_X + \Delta)\lrcorner))$ は有限生成である。

これは、[BCHM] の主結果と藤野–森の標準因子公式 [FM] をあわせると証明出来る。特別な場合を読者のために書いておくと、

系 4 X を非特異射影多様体とする (X は一般型とは限らない！)。このとき、標準環 $\bigoplus_{m\geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$ はつねに有限生成である。

系 5 (X, Δ) を川又対数的末端対とし、$\varphi : X \to W$ を $(K_X + \Delta)$ に関するフリッピング収縮射とする。このとき、φ のフリップは常に存在する。

上記以外の結果もたくさんある。例えば、標準因子が豊富であるような多様体の粗モジュライ空間がコンパクト化まで込めて構成できる。種数が 2 以上の曲線のモジュライ空間の話の一般化である。ただし、証明は GIT とは無関係である。ここでは、なぜ今回の話がモジュライの話と関係があるかを解説しておこう。

種数 2 以上の曲線の 1 次元の族 $f : X \to S$ を考える。つまり、S は曲線で f の一般ファイバーは種数 2 以上の非特異曲線とする。$0 \in S$ の外で f は滑らかな射とする。このとき、$f : X \setminus f^{-1}(0) \to S \setminus \{0\}$ の $0 \in S$ の上に非特異曲線を付け加えて非特異曲線の族を延長することは通常出来ない。そこで安定曲線なる特異曲線が登場するのである。(必要なら S を底変換して) 半安定還元定理を使うと、X は非特異で $f^{-1}(0)$ は X 上の被約な単純正規交差因子と出来る。$f^{-1}(0)$ の中に (-1)-曲線が含まれていれば、それらを全て潰してしまう。すると $f^{-1}(0)$ の中に (-1)-曲線は含まれないとしてよい。この状態は我々の立場では、$f : X \to S$ は相対的極小モデルである、という。$f^{-1}(0)$ の中に (-2)-曲線が入っていたら、それらをすべて潰してファイバー内に (-2)-曲線が存在しないようにできる。こ

のとき、$f : X \to S$ は相対的標準モデルである、という。相対的標準因子 $K_{X/S}$ は f-豊富になり、$X \simeq \mathrm{Proj} \bigoplus_{m \geq 0} f_* \mathcal{O}_X(mK_{X/S})$ と書ける。この相対的標準モデル $f : X \to S$ の $0 \in S$ 上のファイバー $f^{-1}(0)$ として出てくるものが安定曲線である。[BCHM] の結果により (定理 1 の (2) 参照)、非特異擬射影多様体 X から非特異曲線 S への固有射 $f : X \to S$ で $K_{X/S}$ が f-巨大なら、常に S 上の相対的標準モデル $\mathrm{Proj} \bigoplus_{m \geq 0} f_* \mathcal{O}_X(mK_{X/S})$ が存在する。曲線の族の時と同じ考え方をすると、S 上の相対的標準モデルの特殊ファイバーがモジュライのコンパクト化の際に境界に付け加えるべき退化多様体を提供してくれるのである。今の説明から分かるように、GIT の安定性とは直接的な関係はない話である。雰囲気は分かっていただけただろうか？

注意 6 「風が吹けば桶屋が儲かる」的な主張、つまり、大結果 (今の場合は、極小モデルの存在とか標準環の有限生成性など) を認めれば色んなことが示せるという類いの論文が存在すると思う。一昔前までは、「まぁ、当分の間極小モデル理論は完成しないだろう」という雰囲気だったので、ちゃんと細部まで詰めていないものも存在するような気がする。今回 [BCHM] で条件付きの極小モデル理論が完成した。大結果がひとつ証明されたのでドミノ倒し式にガタガタと大量に予想が解決されたことになるはずなのであるが、「風が吹けば桶屋が儲かる」という主張の全てのステップをちゃんとつめないことには本当に桶屋が儲かっているのかどうかよく分からない。風が吹いたのは確実なのだが...。今後の課題である。

[BCHM] の証明のからくりについては [藤 2] に詳しく書いたので、そちらを見ていただきたい。次の 3 章は [藤 2] の補足である。内容的にはほとんどすべて [藤 2] に書いたと思う。

3 質疑応答

数学的に厳密な取り扱いはオリジナルの論文等 ([BCHM] や [藤 2]) を見てもらえばわかるので、ここではよくある質問を取り上げてみたいと思う。専門家以外の人が論文から読みとるのは大変そうに思えることを集めてみた。皆さんの疑問が少しでも解消できればよいと思う。

質問 1 今回の議論では特異点の詳細な分類は必要ないのですか？

答 1 基本的に必要ありません。森による 3 次元末端的フリップの存在証明は、森自身による 3 次元末端特異点の分類にはじまり、3 次元末端的フリッピング収縮射で潰される曲線の解析的近傍の詳細な記述が必要でした。これは専門家にとっても読むのが大変な結果でした。今回の発展では、例えば、川又対数的末端特異点しか持たない多様体の世界では川又–Viehweg 消滅定理が成立する、などの形でしか特異点の性質は使われていません。定義方程式を書き下したり、その結果として得られる特異点の不変量を使うことはありません。一昔前の学生が必ず読んだ [R] は必読の論文ではなくなってしまったと言って良いでしょう。もちろん読むと得るところは大ですが。

質問 2 それでは、特異点の解析は全く必要なくなったと思ってよいのですか？

答 2 正確に言うと、曲面の特異点の分類結果は必要です。n 次元多様体 X と X 上の因子 S を考えます。今回の発展では、次元による帰納法がキーポイントです。したがって、X の標準因子 K_X と S の標準因子 K_S を比較する必要が生じます。X が非特異の時は、同伴公式 $(K_X+S)|_S = K_S$ が成立します。X が特異点をもっていても、特異点がそれほど悪くない時は $(K_X + S)|_S = K_S + \mathrm{Diff}_S(0)$ という形で同伴公式が成立します。この補正項 $\mathrm{Diff}_S(0)$ を different と呼びます。Shokurov 氏によって導入されました ([S1] 参照)。これは S 上の有効 $\mathbb{Q}$-因子になります。この $\mathrm{Diff}_S(0)$ を具体的に計算するためには S 上の因子、つまり、X の余次元 2 の特異点の様子を調べなくてはいけません。したがって、曲面の特異点の分類が必要不可欠になります。ただし、ここで必要となる分類はそれほど難しくなく、基本的には大昔から知られていた分類です。2 次元商特異点の性質を少し丁寧に見る必要があるだけです。

質問 3 3 次元以上の特異点の研究は極小モデル理論の完成には不要と思って良いんですね？

答 3 これは非常に難しい質問です。少なくとも一般次元のかなり一般的な特異点をすべて分類するということは不可能ですし、特殊な特異点であっても定義方程式まで書き下すというような研究は不可能でしょう。ただ、特異点に付随する不変量に関する予想はたくさん存在します。これらの予想を研究している極小モデルの専門家も世の中には存在します。というのも、今回の発展でフリップの存在や特殊な設定での極小モデル理

論は完成しましたが、フリップ予想 II と呼ばれる予想は未解決のままです。つまり、フリップの無限列が存在しないことはまだ示されていません。この予想の解決のためには特異点に付随する不変量の性質を調べる必要があると信じられています。おそらく、現在までに完成した極小モデル理論や次元による帰納法などをつかいながら一般次元の特異点の不変量の解析を目指すと言うのがひとつの方法でしょう。また、モチビック積分やジェットスキームなどの比較的新しい方法も今後役立つかもしれません。

質問 4 森による最初の驚異的なアイデアであった正標数還元テクニックはもはや不要になったのでしょうか？

答 4 良い質問です。そもそも森理論の出発点は、非特異射影多様体 X の標準因子 K_X が数値的正でないとき、X 上に有理曲線 C が存在し、$K_X \cdot C < 0$ となるという発見でした。現在のところ、正標数の世界へ行ってフロベニウス射と変形理論をつかう Bend and Break と呼ばれる森のオリジナルの証明しか知られていません。その後、川又–Viehweg 消滅定理と広中の特異点解消定理を基礎とする極小モデル理論の枠組みが完成し、また、特異点を持つ多様体上では Bend and Break が十分うまく機能しないという事実から、正標数還元テクニックは極小モデル理論の表舞台からは消えてしまいました。ただ、今回の発展でもキーポイントのひとつになった、端射線の中に必ず長さが $2\dim X$ 以下の曲線 (とくに、有理曲線が選べる) が存在するという事実 (川又の定理) の証明は、結局のところ森のオリジナルの議論を必要とします。

質問 5 (X, Δ) は川又対数的末端対で Δ は巨大という条件がよく出て来ますが、なんだかよく分かりません。どういうメリットがあるのでしょうか？

答 5 たしかに分かりにくい条件です。非常に人工的な条件に見えますね。ここでは X は射影多様体とし、(X, Δ) は川又対数的末端対で Δ が巨大な $\mathbb{Q}$-因子のときに何が言えるのかを見てみましょう。まず、小平の補題をつかうことにより $\Delta \sim_{\mathbb{Q}} A + B$ とかけます。ただし、A は豊富な $\mathbb{Q}$-因子で B は有効 $\mathbb{Q}$-因子です。さらに (X, B) が川又対数的末端対になるように出来ます。錐定理よりクライマン–森錐体は

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X + \Delta \geq 0} + \sum \mathbb{R}_{\geq 0}[C]$$

のように書けます。$\overline{NE}(X)_{K_X+\Delta\geq 0}$ は $\overline{NE}(X)$ で $K_X+\Delta$ との交点数が非負の部分を表します。$K_X+\Delta$ と負で交わる部分は一般には可算無限本の端射線 $\mathbb{R}_{\geq 0}[C]$ で張られます。我々の状況では、$K_X+\Delta \sim_{\mathbb{Q}} K_X+B+A$ と書けました。A が豊富という事実から、$K_X+\Delta$ と負で交わる部分は高々有限本の端射線で張られることが分かるのです。錐定理の一部です。これは見た目より重要な性質で、極小モデルの有限性の問題などとも関係しています。また、$K_X+\Delta$ が数値的正になったとしましょう。このとき、$K_X+\Delta-(K_X+B) \sim_{\mathbb{Q}} A$ となるので、固定点自由化定理より $K_X+\Delta$ が半豊富ということが従います。これも見た目より強力な性質です。

質問 6 代数多様体の分類理論は日本のお家芸だと思っていたのですが、日本人研究者は最近の大発展に貢献していないのですか？

答 6 非常に厳しい質問です。それなりに貢献しているとは思いますが、発展の中心に日本人がいないのは事実です。すみません。とりあえず代表して謝っておきます。4.1 に勉強方法を書いておくので、優秀な若い人の参入を待っております。

4　文献ついて

すでに何度も述べているが、今回の大結果は論文 [BCHM] による。まだまだ改訂を繰り返しているようであるが、本質的な部分はすでに落ち着いていると思う。60〜70 ページ程度の論文であるが、本質的な部分は 20 ページ程と思う。イントロや応用、証明の準備等にページを裂いているのでページ数がかさんでいるだけである。この [BCHM] を読むためには [BOOK] の 5 章は必要不可欠である。この 5 章は内容的には [HM] そのものである。[BOOK] の 3 章と 4 章あたりも役立つかもしれない。それ以外の部分は [BCHM] を理解するのに不可欠と言うわけではない。もちろん [BCHM] も [BOOK] も [K 森] 程度の知識は仮定している。といっても、[K 森] は 3 章を中心に 5 章や 6 章の一部分を理解していれば問題ないと思う。[K 森] の 6 章の結果も 7 章の結果も大半が [BCHM] の主結果を認めると古い結果になってしまった。もう少し詳しく勉強方法を考えてみよう。

4.1 極小モデル理論の勉強方法

手っ取り早く極小モデル理論の最先端へ到達する道のひとつを示してみよう。ここでいう最先端とは [BCHM] の理解である。[BCHM] の出現によって極小モデル理論は出発点と目標がある意味ひっくり返ってしまったので、学習の際にはすこし注意が必要である。まず、最初に身に付けないといけないのは、食い違い係数 (discrepancy) の計算方法である。[K 森] の 2.3 章である。これは避けて通れないところである。大変だと思うが、とにかく食い違い係数だけはどうしようもない。これが身に付いたら [K 森] の 3 章で錐定理や固定点自由化定理などの基本的な定理とテクニックを身に付けるべきである。川又–Viehweg 消滅定理のようなコホモロジーの消滅定理や特異点解消定理などは、証明を読むより使い方を学ぶ方が有益である。曲面の特異点に関しては、[K 森] の 4.1 章や 4.2 章程度のこと (これらは極小モデル理論の専門家でなくても知っていて損はしない) は必要だが、同時特異点解消や楕円型特異点のような難しい話は不要である。[K 森] の 5 章を見てみると、5.1 章と 5.5 章は完全に代数幾何の一般論である。5.2 章と 5.4 章は非常に大切なテクニックの宝庫なので、完全に理解する必要がある。5.3 章は [BCHM] の理解には不要である。[K 森] の 6 章、7 章に関しては、6.1 章に集められた基本的なテクニックは大切であるが、それ以外の部分は [BCHM] の理解に直接必要と言うわけではない。もちろん読むと得ることも多いと思うが。これで基礎はほとんど終了である。[FA] の 16 章の前半で同伴公式 (adjunction) を学べば完璧であろう。ここまでくれば [BOOK] の前半 (1 章から 5 章) は十分読める。[BOOK] の 5 章を理解することが一番大切である。Lazarsfeld の本 [L] の 9 章、10 章、11 章で解説されている乗数イデアル層 (multiplier ideal sheaf) の理論を知っていると [BOOK] の 5 章の理解の助けになるはずである。[藤 2] をチラチラとみながら [BOOK] と [BCHM] を眺めていけば、すべて理解可能のはずである。代数幾何の基礎を理解している人ならそれほどの苦労なしで [BCHM] まで到達可能だと思う。ただし、ここで書いた方法で [BCHM] まで到達したとしても、到達した頃にはもっと先まで進んでいるという可能性がある。最近の発展のスピードはかなり早いので、1〜2 年後にどこまで進んでいるかは誰も予想出来ない。さらに、現在未解決の大問題であるフリップ予想 II やアバンダンス予想は、上で述べた勉強方法ではカバーしていないテクニックで研究が進んでいる可能性が非常に高いことを注意しておこう。[BCHM] の大結果を認めてユーザーに徹するという研究態度もよいかも知れない。特異点解消定理のようにユーザーに徹

するのである。フリップの存在や標準環の有限生成性を使ってどんどん研究を進めるのも悪くないと思う。最後に、[藤 2] に詳しい文献表があるので、それも参考にしていただきたい。

4.2 本について

[BOOK] について詳しく見てみよう。そもそも [BOOK] は [S2] を解読するために企画された。本というよりは論文集と言った方がよいかもしれない。[BCHM] 直前までの研究が収録されている。著者は F. Ambro、A. Corti、O. Fujino、C. Hacon、J. Kollár、J. McKernan、H. Takagi の 7 名である。1 章は Corti によるイントロダクションである。ここに本の内容がまとめてある。すべて理解している人には分りやすい解説であるが、このイントロダクションだけで全体像をつかむのは大変かも知れない。2 章は Corti による 3 次元 pl フリップの解説である。[S2] の中に埋もれていた議論を掘り起こした労作である。かなり丁寧に書かれている。3 次元の pl フリップに関して言えば、これが一番簡単な証明であろう。3 章は Fujino による対数的末端特異点についての解説である。入門段階では不必要かもしれないが、発展的な話題を勉強する時に有り難みが分かると思う。単なる解説だけではなく、オリジナルの結果も入っている。4 章も Fujino による。特殊停止定理と還元定理である。特殊停止定理の思い出話はこの報告書の 5 章を見ていただきたい。この 4 章と 2 章を合わせると、3 次元対数的フリップの存在が完全に示せたことになる。5 章は Hacon と McKernan による [HM] の解説である。上手く書けていると思う。[HM] よりかなり洗練されている。6 章は del Pezzo 曲面上の線形系の話を扱っている。これも元ネタは [S2] にあり、Shokurov による 4 次元 pl フリップの証明の一部分をなす予定であった。ここは Corti、McKernan、Takagi の共著である。7 章は McKernan による。Shokurov の予想についてのひとつのアプローチを解説している。この部分も結局フリップの存在問題には不要になった。[HM] のおかげである。8 章は Kollár による解説記事である。小平の標準因子公式の一般化を扱っている。VHS の応用である。フリップや [BCHM] とは直接的な関係はない。9 章は Ambro による短い章である。Shokurov の 4 次元 pl フリップの存在証明に必要と思われた、非常に悪い特異点を許した曲面上の線形系の話を扱っている。最後の 10 章は Corti による用語解説である。

5　特殊停止定理の思い出

最後に特殊停止定理 (special termination) についての思い出話を書いておきたい。そもそも特殊停止定理は Shokurov 氏が 3 次元対数的フリップの構成のときに導入した概念である ([S1] 参照)。pl フリップの存在と特殊停止定理から一般の対数的フリップの存在が示せるというのが Shokurov 氏の偉大な洞察のひとつであった。3 次元の時の完全な証明は [FA] の 7 章にある。[S2] の 2 章では、$n-1$ 次元の極小モデル理論を認めれば n 次元の特殊停止定理が成立すると主張している。Shokurov 氏の主張はかなり豪快である。メチャクチャ一般的な主張をしている。ところが、実際の証明では様々な付加的な条件を付けている。応用上は全く問題ないのであるが、証明出来ていない無意味に一般的な主張を定理と断言しているのは悩ましい限りである。さらに証明を読み進んでいくと、結局 4 次元の非常に特別な場合しか論じていないのである。その証明もいまいちよく分からない。最後は当時入手不可能だった Prokhorov 氏との共著プレプリントに問題を押し付けて終了という感じであった。ハッキリ言って理解不能であった。全くもって理解不能だったので、ケンブリッジのニュートン研究所に滞在していた私は問題を定式化しなおし、既存のテクニックで完全な証明を得た。ただ、その当時は自分のやったことの価値がよく分からなかった。その後少し遅れてケンブリッジにやって来た Prokhorov 氏に私のノートを「たぶん知っていることしか書いていないと思うけど」と言って手渡した。すると Prokhorov 氏は「あ〜、良かった。Shokurov 氏に早く証明しろ！と言われていたけど証明出来なくて困っていたんだよ！よかった、よかった！」というようなことを言ったのである。こちらはかなり驚いた記憶がある。Shokurov 氏の予想を解いて、その予想をつかって特殊停止定理を攻略する計画だったようなのだが、その予想に反例が見つかって困っていたらしいのである。というわけで、私のノートが唯一の証明となってしまったのである。その後ケンブリッジにやって来た Iskovskih 氏は私のノートをどこかから入手し (というか、ホームページにも置いてあったが) それを元に Shokurov 氏の結果の解説記事のなかに私の議論をそっくりそのまま入れてしまった。私のノートを引用していたので無問題であるが。私が最初に配付した特殊停止定理の証明は少し議論が不足していたのだが、それに気付かず引用してしまっているような気がする。もちろん解説記事なので細部は省略したといえばそれまでである。面白いことに、後に出版された Shokurov 氏と Iskovskih 氏による解説記事の中でも私の議論をそのまま採用しているのである。ただ

し、そこでは私のノートへの言及は全くなされていない。この私のノートはたくさんの人に読まれたと思うのだが、なんせ主張は Shokurov 氏が作ったものであるし、それだけでは価値がよく分からない主張、つまり、使ってなんぼの結果だったので、単独の論文として出版する計画は全くなかった。Corti 氏が [BOOK] の中に入れたいと言ったので快く同意した記憶がある。ところがそれからが長かった。[BOOK] は結局構想から出版まで 4〜5 年の歳月がかかってしまった。意外だったのは、[BCHM] のなかで特殊停止定理が大活躍していることである。[BCHM] では、スケール付き極小モデル理論という枠組みの中で特殊停止定理をうまく使いこなしている。厳密に言うと [BCHM] の中の特殊停止定理はそれまでのものと少し違うが、その点は気にしないでおこう。どうも特殊停止定理は次元による帰納的な議論ですごく力を発揮する定理だったようである。もっと深く追求しておけばよかったのかも知れないが、後の祭である。で、今や特殊停止定理の証明は多くの人に理解されていると思われるし、証明自体も難しくないことが認識されていると思う。ただ、釈然としないのは、Shokurov 氏のこんがらがった証明を読まずに私の証明だけを見て、「証明は簡単だ」と結論付けられることである。Kollár 氏も、特殊停止定理の証明に使うテクニックはすべて昔から知られていたものばかりである、という感じのことを述べていた。それは全くの事実であるが、おそらく、昔からの簡単なテクニックだけで特殊停止定理は証明出来る！と示した所が私の一番の貢献だと思う。なんせ Shokurov 氏の最初の構想では難しい予想 (結局 Prokhorov 氏によって反例が構成された？) に問題を帰着させる予定だったのであるから。

参考文献

[BCHM] C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon, and J. McKernan, Existence of minimal models for varieties of log general type, arXiv:math/0610203.

[BOOK] *Flips for* 3*-folds and* 4*-folds* (Alessio Corti, ed.), Oxford University Press, 2007.

[FA] J. Kollár et al., *Flips and Abundance for Algebraic Threefolds*, Astérisque **211**, (1992).

[藤 1] 藤野　修, Recent developments in the log minimal model program (対数的極小モデル理論の最近の発展について), 第 50 回代数学シンポジウム報告集, 151–162 (2005).

[藤 2] 藤野　修, 極小モデル理論の新展開, 雑誌数学の論説として準備中.

[FM] O. Fujino, S. Mori, A canonical bundle formula, J. Differential Geom. **56** (2000), no. 1, 167–188.

[HM] C. Hacon, J. McKernan, On the existence of flips, math.AG/0507597.

[K 森] J. Kollár, 森重文, 双有理幾何学, 岩波書店, 1998.

[L] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry. II. Positivity for vector bundles, and multiplier ideals*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], **49**. Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+385 pp.

[R] M. Reid, Young person's guide to canonical singularities, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), 345–414, Proc. Sympos. Pure Math., **46**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[S1] V. V. Shokurov, 3-fold log flips, Russian Acad. Sci. Izv. Math. **40** (1993), no. 1, 95–202

[S2] V. V. Shokurov, Prelimiting flips, Tr. Mat. Inst. Steklova **240** (2003), Biratsion. Geom. Linein. Sist. Konechno Porozhdennye Algebry, 82–219; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 2003, no. 1 (240), 75–213

[Si] Y.-T. Siu, Invariance of plurigenera, Invent. Math. **134** (1998), no. 3, 661–673.