有限群の表現論におけるブルエ予想をめぐって

奥山　哲郎　(北海道教育大学・教育学部（旭川校))

はじめに

有限群のモジュラー表現論における M. Broué ブルエの予想（Abelian Defect Group Conjecture) が提起されてから、すでに１０数年が経過している。R. Brauer の指標理論、J.A. Green の加群論的考察の理論を学び、J.L. Alperin のコホモロジー論的視点を強調した表現論に新鮮さを感じた１９７０年代後半、多元環の表現論における Auslander-Reiten の理論、J.F. Carlson の加群の variety の理論など、他分野との接触に心躍らせた１９８０年代、そして、このブルエ予想が出現した。上述の指標理論、加群論、加群のコホモロジー論を基礎に、加群の複体の圏の同値性に関わるものであった。講演者は、その数学的内容を十分に理解していないし、行く末を見定める能力をもっていないが、「夢」とも表現されたこの予想に強い説得力を感じる。この予想が有限群の表現論の研究に及ぼした影響、もたらした実りは、計り知れないものがある。

k を代数的閉体とする。k 上の多元環 A は k 上有限次元、A-加群は、有限生成、右 A-加群とする。加群の複体は上下に有界なもののみを扱う。A-加群の複体のなす圏を $C^b(\mathrm{mod}\,A)$、そのホモトピー圏を $K^b(\mathrm{mod}\,A)$、さらに、導来圏を $D^b(\mathrm{mod}\,A)$ で表す。導来圏 $D^b(\mathrm{mod}\,A)$ は、$K^b(\mathrm{mod}\,A)$ において、コホモロジーの間の同型を与える射（擬同型）の逆射を付け加えた圏である。A, B が k 上の多元環であるとき、両側 (A, B)-加群は、$A^\circ \otimes_k B$-加群となる。ここで、A° は、A における積の順序を変えてできる A の反対多元環を表す。

G を有限群、kG をその k 上の群多元環とする。kG の多元環としての直既約因子 A を kG のブロック (あるいは、$\mathrm{char}.k = p > 0$ であるとき単に、G の p-ブロック) という。ブロック A は、kG の両側 (kG, kG)-加群としての直既約因子のこと、また、kG の中心的原始巾等元 e で $A = kGe$ と表されるものでもある。直既約 kG-加群 V に対し、$Ve = V$ となる中心的原始巾等元 e が唯一定まるが、このとき、V はブロック kGe に属するという。自明な kG-加群 k_G の属するブロックを kG の単位ブロックと呼び、$B_0(kG)$ で表す。

$\mathrm{char}.k = p > 0$ であるとき、ブロック A に対し、G の p-部分群 D で、両側加群としての自然な全射 $A \otimes_{kD} A \to A,\ a \otimes b \mapsto ab$ が分裂するようなもののうち、最小なものが G-共役を除いて唯一に定まる。D を、ブロック A の不足群 (defect group) と呼ぶ。定義から、不足群 D は、ブロック A の性質を制約する。例えば、$D = 1$ であることと、A が単純多元環であることは同値な条件である。単位ブロック $B_0(kG)$ の不足群は G の Sylow p-部分群となる。

A を不足群 D をもつ G のブロックとするとき、$kN_G(D)$ の不足群 D をもつブロック B で、両側 $(kN_G(D), kN_G(D))$-加群として A の直和因子に同型なものが唯一存在する。ブロック B を A の Brauer 対応子と呼ぶ。単位ブロック $B_0(kG)$ の Brauer 対応子は、Sylow p-部分群 P の正規化群 $N_G(P)$ の単位ブロック $B_0(kN_G(P))$ である。

ブルエ予想 [1],[2] は、次のように述べられる。

ブルエ予想 G を有限群、A を不足群 D をもつ kG のブロック、B を $kN_G(D)$ のブロックで A の Brauer 対応子とする。このとき、

不足群 D が可換であれば、$\mathrm{mod}\,A$ と $\mathrm{mod}\,B$ は導来同値、つまり、$D^b(\mathrm{mod}\,A) \cong D^b(\mathrm{mod}\,B)$ となる。

ブルエ予想は、「有限代数群」の表現論における Deligne-Lusztig の指標の構成理論に現れる複体のもつ性質の解明に源をもつものと言えるが、それにとどまらず、有限群の指標理論における Glauberman 対応、巡回不足群をもつブロックの Dade の理論などの古典に新たな考察視点を提供し、興味深い研究が数多くなされている。これらの研究内容をもとにブルエ予想の現状等を報告すべきところであるが、講演者の力不足で、予想に対しての一考察方法を提供するだけとなることをお許し願いたい。

講演では、最初に、多元環の間の導来同値についての基礎理論を振り返った後、(B,N)-pair をもつ有限群 G の $D^b(\mathrm{mod}\,kG)$ についての Cabanes-Rickard の定理とそれに付随した事柄を紹介した。さらに、(B,N)-pair をもつ有限群 G の単位ブロックで巡回不足群をもつものを例に簡単なブルエ予想への応用方法を報告した。

1 傾斜複体、両側傾斜複体

A を k 上の多元環とする。$X \in \mathrm{mod}\,A$ に対し、必要に応じ、X を 0 次の項において、$X \in K^b(\mathrm{mod}\,A)$ とみる。$\mathbf{X} \in K^b(\mathrm{mod}\,A)$、整数 n に対し、$\mathbf{X}[n]$ で、$\mathbf{X}$ を左へ n 分移動させた複体を表す（微分写像は $(-1)^n$ 倍）。$\mathrm{proj}\,A$ を射影的 A-加群の圏、$K^b(\mathrm{proj}\,A))$ をその複体のなすホモトピー圏とする。

k 上の多元環 A, B が導来同値、つまり、$D^b(\mathrm{mod}\,A) \cong D^b(\mathrm{mod}\,B)$ であるためには、ある $\mathbf{T} \in K^b(\mathrm{proj}\,A)$ で、次の条件

1. $\mathrm{Hom}_{K^b(\mathrm{proj}\,A)}(\mathbf{T}, \mathbf{T}[n]) = 0, \qquad 0 \neq n \in \mathbb{Z}$
2. $\mathbf{T}$ は $K^b(\mathrm{proj}\,A)$ を生成する（定義の詳細は略）
3. $\mathrm{End}_{K^b(\mathrm{proj}\,A)}(\mathbf{T}) \cong B$

を満たすものが存在することである。条件 1、2 を満たす $\mathbf{T} \in K^b(\mathrm{proj}\,A)$ は A の傾斜複体と呼ばれる。

群多元環のブロックのように、A, B が対称多元環であるとき、傾斜複体は両側化できる。A, B が導来同値であるための条件は、両側 (A,B)-加群の複体 $\mathbf{S} \in K^b(\mathrm{mod}\,A^\circ \otimes_k B)$ で、${}_A\mathbf{S} \in K^b(\mathrm{proj}\,A^\circ)$、$\mathbf{S}_B \in K^b(\mathrm{proj}\,B)$ を満たし、

$$\mathbf{S} \otimes_B \mathrm{Hom}_k(\mathbf{S}, k) \cong A \quad in \quad K^b(\mathrm{mod}\,A^\circ \otimes_k A)$$

$$\mathrm{Hom}_k(\mathbf{S}, k) \otimes_A \mathbf{S} \cong B \quad in \quad K^b(\mathrm{mod}\,B^\circ \otimes_k B)$$

が成立するものが存在することである。

さらに、ブルエ予想においては、そこでの記号のもとで、存在すべき複体 $\mathbf{S} \in K^b(\mathrm{mod}\,A^\circ \otimes_k B)$ の各項は $A \otimes_{kQ} B,\ Q \subseteq D$ の直和因子の直和でかけるようにとれるだろうと予想されている。

以上は、Rickard の一連の結果 [11],[13],[14] による。Rouquier [15],[16],[17] には、これらの結果がていねいにまとめられ、予想解決への戦略が報告されている。

2　有限Coxeter群に付随したいくつかの複体

有限群 G は、その部分群の対 B, N で、次の公理を満たすものをもつとき、標数 p 型の split (B,N)-pair をもつ群といわれる (p は素数)。

1. $G =< B, N >$
2. $T = B \cap N = \cap_{x\in N} B^x \trianglelefteq N$ は可換 p'-群，　B は p-部分群 $U \trianglelefteq B$ をもち $B = UT$ と表される。
3. $W = N/T$ は、位数 2 の元からなる生成系 $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$ をもち、$n \in N$, $n_i \in N, n_iT = s_i$ について次が成り立つ。(W はこの (B,N)-pair に付随した Weyl 群と呼ばれる。)
   (a) $n_iBn \subseteq BnB \cup Bn_inB$
   (b) $n_iBn_i \neq B$

これは、有限 Chevalley 群と呼ばれる群、有限簡約代数群（$\mathbb{F}_q$ 上定義される連結簡約群の $\mathbb{F}_q$ 有理点のなす有限群, $q = p^a$）が共通にもつ性質である。

$\mathbb{F}_q$ 上の一般線形群 $G = GL(n+1,q)$ を例に述べると、
B；上三角行列のなす部分群, N；*monomial* 行列のなす部分群
T；対角行列のなす部分群, U；対角成分 1 の上三角行列のなす部分群
$W = N/T \cong S_{n+1}$ で、s_i は互換 $(i\ i+1)$ に対応する置換行列

ここではさらに、U においてある種の交換関係を仮定する。

このとき、Weyl 群 $W = N/T$ は、あるユークリッド空間のルート系 Δ に付随した有限鏡映群と同一視でき、特に、有限 Coxeter 群となる。また、生成系 S は Δ のある基本ルートの集合 Π の鏡映の全体と一致しているとしてよい。(B,N)-pair をもつ群の性質の詳細は、例えば、[3],[5] に詳しい。以下、必要な記号を用意する。生成系 S で定まる W 上の長さ関数を $\ell : W \to \mathbb{N}$ で表す。

$I \subset S$ に対し、
$W_I =< I >$；I に関する W の放物型部分群、　$w_I \in W_I$；W_I における（唯一の）極大長さをもつ元、$w_0 = w_S \in W_S = W$
$T \subset N_I \subset N; N_I/T = W_I$
$P_I = BN_IB$；I に関する G の放物型部分群, $U_I = U^{w_I} \cap U$, $U_I = O_p(P_I) \trianglelefteq P_I$ で $P_I = L_IU_I = L_I \ltimes U_I$ と分解する。L_I は P_I の Levi 部分群と呼ばれる。

$GL(n+1,q)$ を例にすると、P_I, U_I, L_I のイメージは順に次の形の行列からなる部分群に相当する。

$$\left(\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline 0 & * & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|c|c} I & * & * \\ \hline 0 & I & * \\ \hline 0 & 0 & I \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|c|c} * & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right)$$

以下の議論において、集合 S に全順序を適当に定める。$s \in S \setminus I$ に対し、$n(I,s) = |\{\ s' \in I\ ;\ s' < s\ \}|$ と定義する。

k を代数的閉体とし、G の部分集合 H に対し、$[H] = \sum_{h\in H} h \in kG$ とおく。

2.1 Coxeter 群 W の mod kW における Rickard の結果

有限 Coxeter 群 W に対し、その W-poset あるいは、Coxeter poset は、次の右剰余類のなす半順序集合をいう。

$$\{\ W_I w\ ;\ w \in W,\ I \subset S\ \}$$

これに付随して kW-加群の複体が次のように、定義される。

$I \subset S$ に対し、$[W_I]kW \cong k_{W_I}^{W}$ を考える。このとき、$I, J \subset S$ について、kW-準同型

$$\pi_{IJ}\ :\ [W_I]kW \to [W_J]kW, \quad [W_I]\ \mapsto [W_J]$$

が定義される。$I \subset J \subset K \subset S$ であれば、$\pi_{JK} \circ \pi_{IJ} = \pi_{IK}$ が成り立つことが容易にわかる。

定義 1 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(W, S) \in K^b(\mathrm{mod}\, kW)$ は、0 でない項が次数 0 から次数 $|S|$ の範囲にあり、次数 t $(0 \leqq t \leqq |S|)$ の項が

$$(\mathbf{A})^t = A^t = \oplus \sum\nolimits_{I \subset S,\ |I| = t} [W_I]kW$$

で与えられる。微分写像 $d^t : A^t \to A^{t+1}$ $(0 \leqq t \leqq n)$ は、$[W_I]kW \subset A^t$ の上で次で定義される。

$$d^t = \sum\nolimits_{s \in S \setminus I} (-1)^{n(I,s)} \pi_{I I \cup \{s\}}$$

$s', s \in S \setminus I$、$s' < s$ について、$n(I, s') = n(I \cup \{s\}, s'),\ n(I, s) = n(I \cup \{s'\}, s) - 1$ が成り立つことから $d^{t+1} \circ d^t = 0$ が確かめられ、$\mathbf{A}$ が複体となることがわかる。次の結果は Rickard [14] によるもので、以下の考察の出発点となる。ε_W で W の符号表現を与える 1 次元 kW-加群を表す。

命題 1 (Rickard [14]) $\mathbf{A}$ について次が成り立つ。

1. $\mathrm{Hom}_{K^b(\mathrm{mod}\, kW)}(\mathbf{A}, \mathbf{A}[n]) \cong \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ k & n = 0 \end{cases}$
2. $\mathrm{Hom}_k(\mathbf{A}, \mathbf{A}) \cong k_W$ *in* $K^b(\mathrm{mod}\, kW)$
3. $H^n(\mathbf{A}) \cong \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ \varepsilon_W & n = 0 \end{cases}$

この命題の証明には Coxeter 群 (W, S) の Coxeter poset が単位球面 $S^{|S|-1}$ に W-同相であることから得られる次の補題 (Lemma 8.1[14]) が重要であった。

補題 1 $K \subset S$ とするとき、$C^b(\mathrm{mod}\, kW_K)$ において、$\mathbf{A}(W, S) \downarrow_{kW_K}$ の部分複体 $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ があって次が成り立つ。

1. $\mathbf{A}(W, S) = \mathbf{B} \oplus \mathbf{C}$
2. $\mathbf{B} \cong \mathbf{A}(W_K, K)$
3. $\mathbf{C}$ は可縮

2.2 $(\mathbf{B},\mathbf{N})$-Pair をもつ群における Cabanes-Rickard の定理

G を上に定義した、標数 p 型の split (B,N)-pair をもつ群とする。この小節では、

p は char.k を割らないとする。

(B,N)-pair をもつ群の指標環の Alvis-Curtis-Kawanaka の duality と関わって、その複体版が、Cabanes-Rickard [4] で考察されている。これは、前小節で定義した複体 $\mathbf{A}(W,S)$ と密接に関わって定義される両側 (kG,kG)-加群の複体である。

$I\subset S$ に対し、$e_I=|U_I|^{-1}[U_I]=|U_I|^{-1}\sum_{u\in U_I}u\in kU$ とおく。$U_I\trianglelefteq P_I$ より、e_I は kP_I の中心的巾等元であるから、kGe_I、e_IkG はそれぞれ両側 (kG,kP_I)-加群、両側 (kP_I,kG)-加群となる。そこで、両側 (kG,kG)-加群 $kGe_I\otimes_{kP_I}e_IkG$ を考える。

$I\subset J\subset S$ について、$U_I\supset U_J$ より、$e_I=e_Ie_J=e_Je_I$ で、また、$P_I\subset P_J$ であることから、(kG,kG)-準同型

$$\pi_{IJ}\ :\ kGe_I\otimes_{kP_I}e_IkG\to kGe_J\otimes_{kP_J}e_JIkG,\quad e_I\otimes_{kP_I}e_I\mapsto e_I\otimes_{kP_J}e_I$$

が定められる。

定義 2 両側 (kG,kG)-加群の複体 $\mathbf{X}=\mathbf{X}(G)\in K^b(\mathrm{mod}\,kG^\circ\otimes_k KG)$ は、0 でない項が、次数 0 から次数 $|S|$ の範囲にあり、次数 t $(0\leqq t\leqq|S|)$ の項は

$$(\mathbf{X})^t=X^t=\oplus\sum_{I\subset S,\ |I|=t}kGe_I\otimes_{kP_I}e_IkG$$

で与えられ、微分写像 $d^t:X^t\to X^{t+1}$ $(0\leqq t\leqq n)$ は、$kGe_I\otimes_{kP_I}e_IkG\subset X^t$ の上で次のように定義される。

$$d^t=\sum_{s\in S\setminus I}(-1)^{n(I,s)}\pi_{II\cup\{s\}}$$

記号の節約のため、前小節と同じ記号 π_{IJ}、d^t を用いた。

複体 $\mathbf{X}$ について、Cabanes-Rickard [4] は次の定理を証明した。

定理 1 (Cabanes-Rickard [4])

1. $\mathbf{X}\otimes_{kG}\mathrm{Hom}_k(\mathbf{X},k)\cong kG$ *in* $D^b(\mathrm{mod}\,kG^\circ\otimes_k KG)$
2. 函手 $-\otimes_{kG}\mathbf{X}\ :\ D^b(\mathrm{mod}\,kG)\to D^b(\mathrm{mod}\,kG)$ は、導来圏の自己同値を与える。

この定理は、Broué [1] における (ブロックの導来同値性の予想とは別の）予想に肯定的解決を与えるものである。彼らはさらに、この定理が $K^b(\mathrm{mod}\,kG)$ においても成立しているだろうと予想している。実際、この予想が成立することがわかる [9]。

前小節の補題 1 での部分複体 $\mathbf{B},\mathbf{C}$ を純代数的に構成し、その応用として、補題 1 に対応する次の補題を証明することが鍵となる。

$K\subset S$ とする。このとき、L_K は、$\{B\cap L_K,U\cap L_K,N_L,T\}$ をデータとして、split (B,N)-pair をもつ群となり、その Weyl 群は $W_K=N_K/T$ となる。したがって、定義 2 のように、両側 (kL_K,kL_K)-加群の複体 $\mathbf{X}(L_K)$ が考えられる。全射 $P_K\to P_K/U_K=L_K$ を通して、この複体

$\mathbf{X}(L_K)$ を両側 (kP_K, kP_K)-加群の複体とみる。定義より、$\mathbf{X}(L_K)$ の 0 でない項は、次数 0 から次数 $|K|$ の範囲にあり、次数 $t(\ 0 \leqq t \leqq |K|)$ の項は

$$\mathbf{X}(L_K)^t = \oplus \sum_{I \subset K, |I|=t} kP_K e_I \otimes_{kP_I} e_I kP_K$$

で与えられる。両側 (kG, kP_I)-加群の複体 $\mathbf{X}e_K = \mathbf{X} \otimes_{kG} kGe_K$ について、次の補題が証明される。

補題 2 $C^b(\bmod kG^\circ \otimes_k kP_K)$ において、$\mathbf{X}e_K$ の部分複体 $\mathbf{Y}$ と $\mathbf{Z}$ があって、次が成り立つ。

1. $\mathbf{X}(G) \otimes_{kG} kGe_K = \mathbf{X}(G)e_K = \mathbf{Y} \oplus \mathbf{Z}$
2. $\mathbf{Y} \cong kG \otimes_{kP_K} \mathbf{X}(L_K)$
3. $\mathbf{Z}$ は可縮

2.3 Iwahori-Hecke 環における Linckelmann-Schroll,Parshall-Scott の定理

群多元環の話題と離れるが、前小節の複体と関わって Coxeter 群に付随して定義される Iwahori-Hecke 環上の複体について触れておく。

有限Coxeter 群 (W, S) に対し、パラメター q を用意して、次のように、k 上の多元環 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(W, S)$ が定義され、Iwahori-Hecke 環と呼ばれる。

$\mathcal{H}$ は $\{\ T_w\ ;\ w \in W\ \}$ を基底とした k 上のベクトル空間で、積は次のように定義される。 $s \in S$、$w \in W$ に対し、

$$T_s T_w = \begin{cases} T_{sw} & \ell(sw) > \ell(w) \\ qT_{sw} + (q-1)T_w & \ell(sw) < \ell(w) \end{cases}$$

$I \subset S$ について、$\mathcal{H}_I$ を $\{\ T_w\ ;\ w \in W_I\ \}$ で k 上生成された部分空間とすると、これは、$\mathcal{H}$ の部分多元環となる。$\mathcal{H}_I$ は、Coxeter 群 (W_I, I) に付随した Iwahori-Hecke 環と同型であり、I に関する放物型部分多元環と呼ばれる。

$I \subset J \subset S$ に対し、自然に、両側 $(\mathcal{H}, \mathcal{H})$-準同型

$$\pi_{IJ} : \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{H}_I} \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{H}_J} \mathcal{H}, \quad T_1 \otimes_{\mathcal{H}_I} T_1 \mapsto T_1 \otimes_{\mathcal{H}_J} T_1$$

が定められる。

定義 3 両側 $(\mathcal{H}, \mathcal{H})$-加群の複体 $\mathbf{D} = \mathbf{D}(W, S)$ は、0 でない項は、次数 0 から $|S|$ の範囲にあり、次数 t $(0 \leqq t \leqq |S|)$ の項が

$$(\mathbf{D})^t = D^t = \oplus \sum\nolimits_{I \subset S,\ |I|=t} \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{H}_I} \mathcal{H}$$

で与えられ、微分写像 $d^t : D^t \to D^{t+1}$ $(0 \leqq t \leqq n)$ は $\mathcal{H} \otimes_{\mathcal{H}_I} \mathcal{H} \subset D^t$ の上で次のように定義される。

$$d^t = \sum\nolimits_{s \in S \setminus I} (-1)^{n(I,s)} \pi_{II \cup \{s\}}$$

複体 $\mathbf{D}$ について、Linckelmann-Schroll [8] と Parshall-Scott [10] は独立に、次の定理を証明している。

定理 2 (Linckelmann-Schroll [8], Parshall-Scott [10]) パラメター q が k で 0 でないとき、関手 $-\otimes_{\mathcal{H}}\mathbf{D}\ :\ D^b(\mathrm{mod}\,\mathcal{H})\to D^b(\mathrm{mod}\,\mathcal{H})$ は、導来圏の自己同値を与える。

Linckelmann-Schroll [8] は、この函手 $-\otimes_{\mathcal{H}}\mathbf{D}$ がホモトピー圏 $K^b(\mathrm{mod}\,(mathcalH)$ の自己同値を与えるだろうと予想している。前小節と同じ議論で、予想の正しいことがわかる [9]。

3 (B,N)-Pair をもつ有限群

以下、G を前節で定義したデータ $\{\ B,U,N,T\ \}$ の標数 p 型の split(B,N)-pair をもつ有限群とする。

表現を考える体 k は、正標数 ℓ で、$\ell\neq p$ とする。

したがって、興味のブロックは ℓ-ブロックであることに注意する。この節では、節 2.2 で与えた両側 (kG,kG)-加群の複体 $\mathbf{X}$ から得られる kG-加群の複体 2 つの性質を調べ、その簡単な応用例を与える。

3.1 Steinberg 表現と k_G の相対射影被覆

$k_G=k[G]$ を自明な kG-加群とする。ここで、$[G]=\sum_{g\in G}g\in kG$ である。kG-加群の複体 $k_G\otimes_{kG}\mathbf{X}$ の性質を調べる。

$I\subset S$ に対し、$[P_I]=\sum_{g\in P_I}g$ を考えると、$[P_I]kG\cong k_{P_I}^G$ である。$I\subset J\subset S$ に対し, kG-準同型

$$\pi_{IJ}:[P_I]kG\to[P_J]kG,\ [P_I]\mapsto[P_J]$$

が定まる。また、次の kG-同型

$$k_G\otimes_{kG}(kGe_I\otimes_{kP_I}e_IkG)\cong[P_I]kG\quad [G]\otimes_{kG}e_I\otimes_{kP_I}e_I\mapsto[P_I]$$

があることも容易に確かめられる。したがって、複体 $k_G\otimes_{kG}\mathbf{X}$ は、次で定義される kG-加群の複体 $\mathbf{P}(G)=\mathbf{P}$ に同型となる。

定義 4 kG-加群の複体 $\mathbf{P}$ は、0 でない項は、次数 0 から次数 $|S|$ の範囲にあり、次数 t $(0\leqq t\leqq|S|)$ の項は、

$$(\mathbf{P})^t=P^t=\oplus\sum\nolimits_{I\subset S,\ |I|=t}[P_I]kG$$

で与えられ、微分写像 $d^t:P^t\to P^{t+1}$ $(0\leqq t\leqq n)$ は $[P_I]kG\subset P^t$ の上で次のように定義される。

$$d^t=\sum\nolimits_{s\in S\setminus I}(-1)^{n(I,s)}\pi_{II\cup\{s\}}$$

一般に、有限群 G とその部分群の属 $\mathcal{P}$ が与えられているとき、相対 $\mathcal{P}$-射影的という概念が定義される。

kG-加群 V は $\oplus\sum_{P\in\mathcal{P}}V_P{}^G$ の直和因子に同型であるとき、$\mathcal{P}$-射影的という。また、kG-加群の短完全列 $0\to U\to V\to W\to 0$ は、任意の $P\in\mathcal{P}$ に対し、kP-加群の列として分裂するとき、$\mathcal{P}$-split 列と呼ばれる。$\mathcal{P}=\{1\}$ のとき、$\mathcal{P}$-射影的であることは、射影的と同じ概念である。加群の射影被覆の概念も $\mathcal{P}$-射影被覆に拡張される。

定義 5 V を kG-加群とするとき、kG-加群の短完全列 $0 \to W \to X \to V \to 0$ は、次の条件をみたすとき、V の $\mathcal{P}$-射影被覆と呼ばれる。

1. X は、$\mathcal{P}$-射影的
2. この列は、$\mathcal{P}$-*split* 列

さらに、次の条件をもつとき、V の極小 $\mathcal{P}$-射影被覆と呼ばれる。
3. W は、$\mathcal{P}$-射影的な直和因子をもたない。

任意の kG-加群に対し、$\mathcal{P}$-射影被覆が存在し、極小なものは列の同型を除いて一意的にさだまる。

各 t $(0 \leqq t \leqq |S|)$ に対し、G の放物型部分群 P_I で $|I| = t$ なるものの属を $\mathcal{P}_t$ で表す。
次の命題が証明される。

命題 2 次の主張が成り立つ。

1. $m \neq 0$ であれば、$H^m(\mathbf{P}(G)) = 0$
2. 各 t $(0 \leqq t \leqq |S|-1)$ について、次の kG-加群の短完全列;

$$0 \to \mathrm{Ker}\, d^t \to P^t \to \mathrm{Im}\, d^t \to 0$$

は、$\mathrm{Im}\, d^t$ の（極小とは限らない）$\mathcal{P}_t$-射影被覆である。

標数 p 型の (B, N)-pair をもつ有限群は、標数 0 の体上、次元 $|U|$ の既約表現、Steinberg 表現をもつ。$H^0(\mathbf{P}(G))$ はこの Steinberg 表現の k 上の ひとつの 還元となる。ここでは、これを St_G で表す。$n = |S|$ とおく。$P^n = k_G$ に注意して、命題の内容は、

$$0 \to St_G \to P^0 \xrightarrow{d^0} P^1 \xrightarrow{d^1} P^2 \cdots \xrightarrow{d^{i-1}} P^i \xrightarrow{d^i} P^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots P^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} k_G \to 0$$

は、完全系列で、Steinberg 表現 St_G は、自明な加群 k_G の $\mathcal{P}_t$-射影被覆 $(0 \leqq t \leqq n-1)$ を続けてとり得られると述べられる。

3.2 Gelfand-Graev の表現

Weyl 群 W の生成系 $S = \{ s_1, \cdots, s_n \}$ に対し、$U \trianglelefteq B = UT$ であるから $U_i = U \cap U^{w_S s_i} \subset U$ が意味をなして定まる。このとき、部分群 $U^* \subset [U, U]$ があって、$U = U_1 U_2 \cdots U_n U^*$ と表され、$I \subset S$ に対し、$L_I \cap U = (\prod_{i \in I} U_i)(L_I \cap U^*)$ となる。

U の k 上の 1 次元表現, $\gamma : U \to k^\times$ で、$\gamma_{U^*} = 1,\ \gamma_{U_i} \neq 1,\ (1 \leqq i \leqq n)$ なるものを考える。表現 γ に対応する kU の巾等元を同じ記号 γ で表す。U は p-部分群で、$p \neq \ell$ であるから、kG-加群 γkG は射影的である。$\gamma_I = \gamma_{L_I \cap U}$ を γ の $L_I \cap U$ への制限とすると、$\gamma_{I_{L_I \cap U^*}} = 1, \gamma_{I U_i} \neq 1,\ i \in I$ を満たす。これに対応する $kL_I \cap U$ の巾等元を同じく γ_I で表す。このとき、次が成り立つ。

$$\gamma kGe_I = \gamma w_S w_I e_I kP_I = \gamma w_S w_I e_I kL_I, \qquad \gamma w_S w_I e_I kL_I \cong \gamma_I kL_I$$

連結簡約代数群で中心が連結であるものから定まる有限簡約代数群では、上のような γ は T-共役を除いて一意に定まることが知られている。以下、このような仮定のもとで考える。このとき、$\mathrm{End}_{kG}(\gamma kG)$ は可換多元環となる (Chapter 8.1 [3])。

$\Gamma_G = \gamma kG$ は、Gelfand-Graev 表現と呼ばれる。kG-加群の複体 $\Gamma = \Gamma_G \otimes_{kG} \mathbf{X}$ を考える。次の命題が得られる。

命題 3 $\Gamma = \Gamma_G \otimes_{kG} \mathbf{X}$ について、次が成り立つ。

1. $\Gamma \in K^b(\operatorname{proj} kG)$
2. $m \neq 0$ であれば、$\operatorname{Hom}_{K^b(\operatorname{proj} kG)}(\Gamma, \Gamma[m]) = 0$
3. $\operatorname{End}_{K^b(\operatorname{proj} kG)}(\Gamma)$ は可換となる。

G の各 ℓ-ブロック $A = kGe$, (e は中心的巾等元) について、Γ_G のそのブロック部分 $\Gamma_G e = \gamma kGe$ を考えると、それらは直既約となっている [6]。Γ の単位ブロック $B_0(kG)$ 部分の複体を Γ_1 とすると、上の命題が Γ_1 についても成り立つ。また、自明な加群 k_G の射影被覆 $P_G(k_G)$ は、複体 Γ_1 においては、次数 0 の項のみに、重複度 1 で現れることが容易にわかる。次の意味でこの複体は興味深い。

注意 1 一般に、有限群 G の *Sylow* 正規化群 H の自明な加群 k_H の射影被覆 $P_H(k_H)$ について、*Sylow* 群が可換であれば、$\operatorname{End}_{kH}(P_H(k_H))$ は可換である。したがって、単位ブロックについてブルエ予想を考えるとき、作るべき傾斜複体 $\mathbf{T} \in K^b(\operatorname{proj} B_0(kG))$ の $P_H(k_H) \in K^b(\operatorname{proj} B_0(kH))$ に対応する直和因子 $\mathbf{P}$ について、$\operatorname{End}_{K^b(\operatorname{proj} B_0(kG))}(\mathbf{P})$ は可換である。

3.3 $\mathbf{GL(n, q)}$ への応用例

新しい事実ではないが、これまでの考察の簡単な応用例を述べる。

$G = GL(n, q)$ とし、ℓ は、$q^n - 1$ の素因子で、$q^s - 1$. $s < n$ を割らないものとし、単位ブロック $A = B_0(kG)$ を考える。ℓ のとり方から、A の不足群 P は Sylow ℓ-部分群で巡回群である。$H = N_G(P)$ とおき、$B = B_0(kH)$ を kH の単位ブロックとする。巡回不足群をもつブロックは、Brauer tree 多元環として記述できる。

Brauer tree 多元環は対称多元環で、有限 tree T と次のデータから森田同値を除いて一意に定められる。

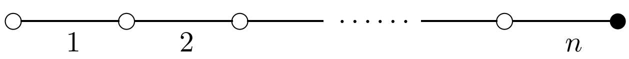
1. 各頂点の周りの辺の巡回順序
2. 例外頂点と呼ばれる特別な一つの頂点
3. 例外頂点の重複度と呼ばれる正整数 m

T から定まる Brauer tree 多元環の単純加群の同型類は T の辺集合 $vx.T = \{1, \cdots, e\}$ に対応する。$i \in vx.T$ に対応する単純加群を S_i、その射影被覆を P_i で表すと、$\operatorname{Soc}(P_i) \cong S_i \cong P_i / \operatorname{Rad}(P_i)$ で、$\operatorname{Rad}(P_i)/\operatorname{Soc}(P_i)$ は、辺 i の２端点それぞれから、次のように定まる２つの単列加群の直和となっている。

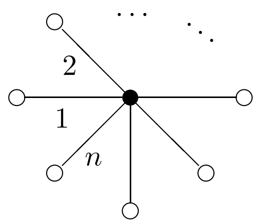
その端点の周りの辺の巡回順序が $(i = i_0, i_1, \cdots, i_k, i_0)$ となっているとき、使われる単列加群の組成列は、$\begin{cases} S_{i_1}, \cdots, S_{i_k} & \text{単点が例外頂点でないとき} \\ S_{i_1}, \underbrace{\cdots, S_{i_k} \cdots\cdots S_{i_1}, \cdots,}_{m} S_{i_k} & \text{単点が例外頂点であるとき} \end{cases}$ となる。

A, B で定まる tree は、n 頂点からなり、例外頂点の重複度 m は $m = \dfrac{|P|-1}{n}$ で与えられる。tree の形はそれぞれ次のようになる。

A



B



一般に、巡回不足群 D をもつブロックについて、$N_G(D)$ の場合には、その tree はいつも、例外頂点を中心点とした星型である。Rickard [12] は Brauer tree 多元環は星型の tree から定まる Brauer tree 多元環に導来同値であることを、傾斜複体の具体的構成方法を与えて示している。

3.1 節で考察した kG-加群の複体 $\mathbf{P}(G)$ は、ここでの設定では、k_G の射影被覆となり、$\Omega^n(k_G) = St_G$ である。このことから、上述の記号で $S_1 = k_G$, $S_n = St_G$ としてよいことがわかり、$\mathbf{P}(G)$ は、次の複体に同型となる。

$$\mathbf{P}(G)\ ;\ 0 \to St_G \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_i \to \cdots P_1 \to k_G \to 0$$

一方、3.2 節で考察した射影的 kG-加群の複体 Γ_1 は、次の形となる。

$$\Gamma_1\ ;\ \cdots 0 \to P_1 \to P_2 \to \cdots \to P_i \to \cdots P_n \to 0 \to \cdots$$

そこで、各 i $(1 \leqq i \leqq n)$ に対し、$\Gamma_i \in K^b(\mathrm{proj}\, kG)$ を

$$\begin{array}{lllll}
\Gamma_1; & \cdots 0 \to P_1 \to P_2 \to & \cdots \to & P_i \to \cdots P_n & \to 0 \to \cdots \\
\Gamma_2; & \cdots 0 \to 0 \to P_2 \to & \cdots \to & P_i \to \cdots P_n & \to 0 \to \cdots \\
\cdots & & \cdots & & \\
\Gamma_i; & \cdots\cdots & \cdots \to & P_i \to \cdots P_n & \to 0 \to \cdots \\
\cdots & & \cdots & & \\
\Gamma_n; & & & \cdots \to 0 \to P_n & \to 0 \to \cdots
\end{array}$$

とおき、$\mathbf{T} = \oplus \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i$ とおく。$\mathbf{T}$ は、Rickard [12] に構成されている A の Brauer tree 多元環 A' の傾斜複体に一致し、$\mathrm{End}_{K^b(\mathrm{proj}\, A')}(\mathbf{T})$ は、B の Brauer tree 多元環 B' に同型となる。

参考文献

[1] M.Broué, *Blocs,isométries parfaites, catégories dérivées* , C. R. Acad. Sci. Paris, 307-I, 13–18, 1988

[2] M.Broué, *Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées* , Astérisque, 181–182, 61–92, 1990

[3] R.W. Carter, Finite groups of Lie type : Conjugacy classes and complex characters, Wiley, 1985

[4] C. Cabanes and J. Rickard, *Alvis-Curtis duality as an equivalence of derived categories*, Modular Representation Theory of Finite Groups(eds. M.J.Collines,B.J.Parshall and L.L.Scott), 157–174, Walter de Gruyter, 2001

[5] C.W. Curtis and I. Reiner, Methods of representation theory with applications to finite groups and orders (Volume II), Wiley, 1987

[6] G. Hiss, *Regular and semisimple blocks of finite reductive groups*, J. London Math. Soc., 41, 63–68, 1990

[7] S. König and A. Zimmermann, Derived Equivalences for Group Ring, Springer Lecture Notes in Mathematics, 1685,1998

[8] M. Linckelmann and S. Schroll, A Two-sided q-analogue of the Coxeter complex, Journal of Algebra, 289, 128–134, 2005

[9] T. Okuyama, *On conjectures on complexes of some module categories related to Coxeter complexes*, Preprint, 2006

[10] B.J. Parshall and L.L. Scott, *Quantum Weyl reciprocity for cohomology*, Preprint, 2003

[11] J.Rickard, *Morita theory for derived categories*, J. London Math. Soc.(2), 39, 436–456, 1989

[12] J.Rickard, *Derived categories and stable equivalence*, J. Pure Appl. Alg., 61, 303–317, 1989

[13] J.Rickard, *Derived equivalences as derived functors*, J. London Math. Soc.(2), 43, 37–48, 1991

[14] J.Rickard, *Splendid equivalences: Derived categories and permutation modules*, Proc. London Math. Soc.(3), 72, 331–358, 1996

[15] R.Rouquier, *From stable equivalences to Rickard equivalences for blocks with cyclic defect*, Groups '93 Galway/St Andrews II(eds. C.M.Campbell *et al.*), London Mathematical Society Lecture Note Series, 212, 512–523, 1995

[16] R.Rouquier, *The derived category of blocks with cyclic defect groups*, in Derived Equivalences for Group Rings (S.König and A.Zimmermann), Springer Lecture Notes in Mathematics 1685, 1998

[17] R.Rouquier, *Block theory via stable and Rickard equivalences* , in Modular Representation Theory of Finite Groups (eds. M.J.Collins, B.J. Parshall and L.L.Scott), de Gruyter, 2001