ラングランズ予想について
～エンドスコピーをめぐって～

斎藤　裕 AND 平賀　郁

1. Introduction

F を p-進体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体とする. F 上の GL_n の局所 Langlands 予想は Harris–Taylor [HT01] と Henniart [Hen00] によって証明された. GL_n の場合は Weil 群の n-次元の既約表現と $GL_n(F)$ の supercuspidal 表現が１対１に対応しているが, 一般の reductive group では局所 Langlands 対応は必ずしも１対１ではなく, endoscopy を考察する必要がある.

本稿では, endoscopy の簡単な解説と平賀郁と斎藤裕との共同研究で得た結果の紹介 (定理 6.9, 定理 7.5) を行う.

§2 では torus の場合を比較的詳しく説明している. これは, 一般の reductive group で L-群の定義をする代わりに torus の場合の L-群について詳しく説明している為と, §3 と §4 で torus の場合を基にして endoscopy を考察しようとした為である. §§3,4,6 では, distribution の transfer としての側面を中心に endoscopy を説明した. また, §§4,6 では, 説明を簡単にする為に $\mathcal{H} = {}^L H$ となる場合だけを扱っている.

本稿では Vogan [Vog93] に従って $\mathcal{S}_\phi$ を定義しているので, 本稿の $\mathcal{S}_\phi$ は [Art89, Art90] の $\mathcal{S}_\phi$ とは異なっている. 平賀郁と斎藤裕による SL_n の inner form の L-packet に関する結果 (定理 6.9) は, 本稿の $\mathcal{S}_\phi$ の定義が適切であることを示唆している.

$\mathcal{S}_\phi$ の定義に従って endoscopic data の定義も修正すべきであったかもしれないが, §4 の endoscopic data の定義は従来のままにしている.

2. 局所 Langlands 対応

以後, §6 まで F は p-進体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体とし, 絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ を Γ_F と書く. また, W_F を Weil 群とする.

局所 Langlands 対応を定式化するには L-群を定義しなければならない. L-群は based root datum を使って定義されるのだが, 以下では, 厳密な定義をする代わりに L-群の定義の考え方の一端を説明することにする. (厳密な定義は Borel [Bor79] を参照).

最初に, F 上定義された代数群 T が代数的閉体 $\overline{F}$ 上で $\mathbb{G}_m = GL_1$ の直積と同形になっているときを考える. このような T は torus と呼ばれる. まず, $T(F)$ の有限位数の character に対する局所 Langlands 対応を思い出してみる. この場合は, 次のように Tate-Nakayama duality により局所 Langlands 対応が実現される. Character lattice $X^*(T)$ と

cocharacter lattice $X_*(T)$ を

$$X^*(T) = \mathrm{Hom}_{\overline{F}}(T, \mathbb{G}_m)$$
$$X_*(T) = \mathrm{Hom}_{\overline{F}}(\mathbb{G}_m, T)$$

で定める．このとき pairing

$$X^*(T) \times T \longrightarrow \mathbb{G}_m$$

は次のカップ積

$$H^2(F, X^*(T)) \times H^0(F,T) \longrightarrow H^2(F, \mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\exp(2\pi\sqrt{-1}\,\cdot\,)} \mathbb{C}^\times$$

を導く．これにより, $H^2(F, X^*(T))$ は $T(F) = H^0(F,T)$ の有限位数の character を定める．ここで T の dual group $\hat{T}$ を

$$\hat{T} = X^*(T) \otimes \mathbb{C}^\times$$

により定義する．$X^*(T)$ には Γ_F が作用しているので, Γ_F を $\mathbb{C}^\times$ に自明に作用させることにより, $\hat{T}$ への Γ_F の作用を定めることができる．

注意 2.1. T と $\hat{T}$ の character lattice と cocharacter lattice の間には次の関係がある．

$$X^*(T) = X_*(\hat{T})$$
$$X_*(T) = X^*(\hat{T})$$

いま, 完全系列

$$0 \longrightarrow X^*(T) \xrightarrow{2\pi\sqrt{-1}} X^*(T) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\mathrm{Exp}} \hat{T} \longrightarrow 1$$

を考えることにより, 同形写像

$$H^1(F, \hat{T}) \xrightarrow{iso.} H^2(F, X^*(T))$$

が得られるので, 結局

$$H^1(F, \hat{T}) \xrightarrow{inj.} \{\ T(F) \text{ の quasi-character }\}$$

が得られる．

この有限位数の character の場合の局所 Langlanda 対応を $T(F)$ の quasi-character 全体に拡張する．いま, 準同形写像 $W_F \longrightarrow \Gamma_F$ により W_F の $\hat{T}$ への作用を定めることができる．このとき, W_F の $\hat{T}$ に値をもつ 1-cocycle のなかで連続なものを考えることにより, 連続コホモロジー $H^1_{cont}(W_F, \hat{T})$ を定義することができる．次の定理が T の局所 Langlands 対応である．

定理 2.2 (Langlands)**.**

$$H^1_{cont}(W_F, \hat{T}) \xleftrightarrow{1:1} \{\ T(F) \text{ の } \textit{quasi-character}\ \}.$$

定義 2.3. $\hat{T}$ と W_F の半直積を ${}^LT$ と書き, T の L-群と呼ぶ．

$${}^LT = \hat{T} \rtimes W_F.$$

定義 2.4. 準同形写像 $W_F \longrightarrow {}^L T$ は, 自然な準同形写像 ${}^L T \longrightarrow W_F$ との合成 $W_F \longrightarrow {}^L T \longrightarrow W_F$ が W_F の恒等写像となるとき, W_F 上の準同形写像と呼ばれる.

より一般に, 群 $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ から W_F への準同形写像が与えられているとき, 準同形写像 $\mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ が W_F 上の準同形写像であるとは, 次の図式が可換であることである.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_1 & \longrightarrow & \mathcal{H}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_F & = & W_F \end{array}$$

さて, cocycle condition $a_{\sigma\tau} = a_\sigma \sigma(a_\tau)$, $\sigma, \tau \in W_F$ は $a_{\sigma\tau} \rtimes \sigma\tau = (a_\sigma \rtimes \sigma)(a_\tau \rtimes \tau)$ と同値なので, 1-cocycle $\{a_\sigma\}$ から W_F 上の準同形写像 $\phi\colon W_F \longrightarrow {}^L T$ を $\phi(\sigma) = a_\sigma \rtimes \sigma$ とすることにより定めることができる. また, 2 つの 1-cocycle $\{a_\sigma\}, \{a'_\sigma\}$ が cohomologous ということは, ある $b \in \hat{T}$ が存在して $a'_\sigma = b^{-1} a_\sigma \sigma(b)$, ${}^\forall \sigma \in W_F$ が成り立つことなので, ϕ', ϕ をそれぞれ $\{a'_\sigma\}$, $\{a_\sigma\}$ の定める準同形写像とすると, $\{a_\sigma\}$ と $\{a'_\sigma\}$ が cohomologous であることと, ある $b \in \hat{T}$ が存在して $\phi' = \mathrm{Ad}(b) \circ \phi$ となることは同値である. よって,

$$\Phi(T) = \{\ W_F \text{ 上の準同形写像 } \phi\colon W_F \longrightarrow {}^L T\}/\,\mathrm{Ad}(\hat{T})$$

とおくと,

$$\Phi(T) \simeq H^1_{cont}(W_F, \hat{T}) \xleftrightarrow{1:1} \{\ T(F) \text{ の quasi-character }\}$$

である. このような ϕ を Langlands parameter と呼ぶ.

次に G が connected reductive group の場合を考える. Torus のときと異なり, G の character lattice から dual group を作ることはできないが, 次のようにして G の dual group $\hat{G}$ を定めることができる. まず, T を G の極大 torus とする. このとき, G の T に関する root 全体のなす集合 $R(T)$ は $X^*(T)$ の部分集合であり, coroot 全体のなす集合 $\check{R}(T)$ は $X_*(T)$ の部分集合である. さて, $X^*(\hat{T}) = X_*(T)$, $X_*(\hat{T}) = X^*(T)$ なので, $\hat{T}$ を極大 torus とする connected reductive group を考えようとすると root の集合と coroot の集合を入れ替えなければならない. つまり, G から得られる 4 つ組 $(X^*(T), R(T), X_*(T), \check{R}(T))$ の dual として, character lattice と cocharacter lattice を入れ替え, root の集合と coroot の集合を入れ替えた 4 つ組 $(X_*(T), \check{R}(T), X^*(T), R(T))$ を考えなければならない. 実は, $\mathbb{C}$ 上定義された connected reductive group で対応する 4 つ組が $(X_*(T), \check{R}(T), X^*(T), R(T))$ となるものが同形を除いて一意的に存在することがわかっている. この connected reductive group の $\mathbb{C}$-有理点のなす群を $\hat{G}$ と定め, G の dual group と呼ぶ. このとき, $\hat{G}$ の極大 torus $\mathcal{T}$ は $\hat{T}$ と同形である. (但し, 同形写像は一意的ではなく, Weyl 群 $W(\hat{G}, \mathcal{T})$ の作用の分の不定性がある). Γ_F の $X^*(T), X_*(T), R(T), \check{R}(T)$ への作用は T の取り方によっているが, そこから定まる準同形写像 $\Gamma_F \longrightarrow \mathrm{Out}(\hat{G})$ は T の取り方によっていないので, 準同形写像 $\Gamma_F \longrightarrow \mathrm{Out}(\hat{G})$ から Γ_F の $\hat{G}$ への作用を定める.

(実際には $\hat{G}$ に splitting を与えて Γ_F の $\hat{G}$ への作用を定める). Torus の場合と同様に G の L-群を

$$^LG = \hat{G} \rtimes W_F$$

により定める.

G	$\hat{G}$
GL_n	$GL_n(\mathbb{C})$
SL_n	$PGL_n(\mathbb{C})$
PGL_n	$SL_n(\mathbb{C})$
U_n	$GL_n(\mathbb{C})$
Sp_n	$SO_{2n+1}(\mathbb{C})$
SO_{2n+1}	$Sp_n(\mathbb{C})$
SO_{2n}	$SO_{2n}(\mathbb{C})$

表 1. G と $\hat{G}$ の対応

定義 2.5.

$$\Phi(G) = \{\phi : W_F \times SU_2 \longrightarrow {}^LG \mid \text{ 下の (1)〜(3) をみたす }\}/\operatorname{Ad}(\hat{G})$$

とおく.

(1) ϕ は W_F 上の準同形写像.
(2) ϕ は semisimple である. つまり, 写像 $W_F \times SU_2 \xrightarrow{\phi} {}^LG \xrightarrow{proj.} \hat{G}$ での W_F の像は $\hat{G}$ の semisimple な元のみからなる集合.
(3) ϕ は relevant. (これは ϕ と対応する $G(F)$ の既約許容表現が存在する為の条件である ([Bor79] 参照)).

また, このような条件をみたす ϕ を Langlands parameter とよぶ.

$\Pi(G)$ を $G(F)$ の既約許容表現の同値類全体のなす集合とする.

予想 2.6 (局所 Langlands 予想)**.** 全射写像

$$\Pi(G) \longrightarrow \Phi(G)$$

で L-因子と ϵ-因子を保存するものが存在し, 様々な条件をみたす.

定義 2.7. $\phi \in \Phi(G)$ と対応する $\Pi(G)$ の元全体からなる集合を $\Pi_\phi(G)$ と書き, ϕ の L-packet と呼ぶ.

GL_n の局所 Langlands 対応の存在は Harris–Taylor [HT01] と Henniart [Hen00] により証明された. 彼らの結果と $GL_n(F)$ の既約表現の分類 [BZ77, Zel80] により, 次の定理がいえる.

定理 2.8 (Harris–Taylor, Henniart)**.** *1 対 1 対応*

$$\Pi(GL_n) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \Phi(GL_n)$$

で, pair の L-因子と ϵ-因子を保存し, いくつかの条件をみたすものが存在する.

注意 2.9. $GL_n(F)$ の元 γ, γ' が $GL_n(\overline{F})$ で共役であれば $GL_n(F)$ でも共役である．つまり, GL_n では $GL_n(F)$ で共役ということと $GL_n(\overline{F})$ で共役ということの間にずれはない．この場合は局所 Langlands 対応は1対1になっている.

注意 2.10. W_F 上の semisimple な準同形写像

$$\xi : {}^L H \longrightarrow {}^L G$$

があると, Langlands parameter $\phi_H : W_F \times SU_2 \longrightarrow {}^L H$ に対して $\phi = \xi \circ \phi_H$ を対応させることにより, L-packet の対応 $\Pi_{\phi_H}(H) \mapsto \Pi_\phi(G)$ が得られる.

3. Invariant distribution と stable distribution

$C_c^\infty(G(F))$ で $G(F)$ 上の locally constant で台がコンパクトな $\mathbb{C}$ に値を持つ関数全体のなす空間を表すことにする.

定義 3.1. $C_c^\infty(G(F))$ 上の線形形式 J が条件

$$J(f) = J(f^g), \quad {}^\forall f \in C_c^\infty(G(F)), {}^\forall g \in G(F)$$

をみたすとき, J は invariant であるという．(但し, $f^g \in C_c^\infty(G(F))$ は $f^g(x) = f(gxg^{-1})$ により定める).

注意 3.2. F が p-進体なので, $G(F)$ 上の distribution とは $C_c^\infty(G(F))$ 上の (位相を考えない) 線形形式のことである.

$G(F)$ の元 γ に対して $\mathcal{O}(\gamma)$ を γ の共役類 $\{g\gamma g^{-1} | \, g \in G(F)\}$ とする．このとき, $\mathcal{O}(\gamma)$ の上の $G(F)$-不変測度 dx ([Ran72] 参照) が存在して, 軌道積分

$$J(\gamma, f) = \int_{\mathcal{O}(\gamma)} f(x)\, dx, \quad f \in C_c^\infty(G(F))$$

を定義することができる．軌道積分 $J(\gamma)$ は invariant distribution である．一方, π を $G(F)$ の既約許容表現とすると distribution character

$$J(\pi, f) = \mathrm{trace}\left\{ \int_{G(F)} f(g)\pi(g)\, dg \right\}, \quad f \in C_c^\infty(G(F))$$

を定義することができる. (dg は $G(F)$ の Haar 測度). このとき, $J(\pi)$ も invariant distribution となる.

定義 3.3. $G(\overline{F})$ の元 γ の中心化群 $\mathrm{Cent}(\gamma, G)$ が G の連結な極大 torus であるとき, γ は strongly regular semisimple であるという．$G(F)$ の strongly regular semisimple な元全体のなす $G(F)$ の部分集合を $G(F)_{sreg}$ と書く.

$G(F)$ の共役類のなかで strongly regular semisimple な元の共役類は比較的扱いやすいものであり, しかも, 次が成り立っている.

命題 3.4. *$C_c^\infty(G(F))$ の上の線形形式の空間の中で $\{J(\gamma) | \gamma \in G(F)_{sreg}\}$ の (弱位相に関する) closed linear span は invariant な線形形式全体のなす空間に一致する．正確に書くと,*

$$C_c^{\infty,0} = \{f \in C_c^\infty(G(F)) | J(\gamma, f) = 0, \quad {}^\forall\gamma \in G(F)_{sreg}\}$$

とするとき, $C_c^\infty(G(F))$ の上の線形形式 J が invariant である為の必要十分条件は $J(C_c^{\infty,0}(G(F))) = 0$ が成り立つことである．

Distribution character $J(\pi)$ も invariant なので $\{J(\gamma) | \gamma \in G(F)_{sreg}\}$ の closed linear span に入るが, より強く次の定理が成り立っている．

定理 3.5 (Harish–Chandra)**.** *$\pi \in \Pi(G)$ に対して $G(F)_{sreg}$ 上の locally constant な関数 $J(\pi, \gamma)$ が存在し,*

$$J(\pi, f) = \int_{G(F)_{sreg}} J(\pi, \gamma) f(\gamma)\, d\gamma, \quad f \in C_c^\infty(G(F))$$

が成り立つ．

$G(\overline{F})$ の共役類を考える必要性をみる為に, ここで Jacquet–Langlands 対応を簡単に説明する．(実は, これは, 典型的な standard endoscopy になっている). D を次数が d の F 上の central division algebra とする．また, m を自然数とし, $n = dm$ とおく．このとき, F 上定義された代数群 G で

(1) $\overline{F}$ 上で GL_n と同形 (同形写像を $\psi : G \longrightarrow GL_n$ とする),
(2) $G(F) = GL_m(D)$,

をみたすものが存在する．

定義 3.6. *$\gamma^* \in GL_n(F)_{sreg}$ が $\gamma \in G(F)_{sreg}$ の norm であるとは, $\psi(\gamma)$ が $GL_n(\overline{F})$ で γ^* と共役であることをいう．*

いま, $\Pi_{disc}(G)$ で $G(F) = GL_m(D)$ の square integrable 表現の同値類全体のなす集合を表し, $\Pi_{disc}(GL_n)$ で $GL_n(F)$ の square integrable 表現の同値類全体のなす集合を表すことにする．このとき, 次が成り立つ．

定理 3.7 (Deligne–Kazhdan–Vigneras)**.** *$\pi^* \in \Pi_{disc}(GL_n)$ に対して, $\pi \in \Pi_{disc}(G)$ で*

$$J(\pi, \gamma) = (-1)^{n-m} J(\pi^*, \gamma^*)$$

が任意の $\gamma \in G(F)_{sreg}$ と γ の norm $\gamma^* \in GL_n(F)_{sreg}$ に対して成り立つものが存在する．しかも, この対応で $\Pi_{disc}(G)$ と $\Pi_{disc}(GL_n)$ は１対１に対応する．

注意 3.8. *G の L-群と GL_n の L-群は ψ によって自然に同一視される．実は, $\pi \in \Pi_{disc}(G)$ と $\pi^* \in \Pi_{disc}(GL_n)$ が 定理 3.7 の意味で対応するということは, π の Langlands parameter と π^* の Langlands parameter が同値になるということである．*

$G(F)$ の表現と $GL_n(F)$ の表現を対応させようとする為に $G(F)$ の共役類と $GL_n(F)$ の共役類を対応させているのだが, G と GL_n は F 上では同形ではないので $\overline{F}$ 上の同形写像を使って共役類を対応させている．今の場合は, $G(F)$ による共役と $G(\overline{F})$ による共役の間に差がないので, $G(F)$ の共役類と $GL_n(F)$ の共役類が上手く対応しているが, 一般の reductive group G に対して同様なことを考えようとすれば $G(\overline{F})$ による共役を考える必要がでてくるのである. (§5 でもう少し詳細に考察をする).

さて, これから, $G(\overline{F})$ による共役を考察していくのだが, 最初から $G(F)$ の全ての元の共役類を扱うのは難しいので, 比較的扱いやすい strongly regular semisimple element γ の共役類を考える．命題 3.4 が成り立っているので, この場合が共役類の考察の基本になる.

定義 3.9. $\gamma, \gamma' \in G(F)_{sreg}$ が $G(\overline{F})$ で共役であるとき, γ と γ' は stable に共役であるといい,

$$\mathcal{O}^{st}(\gamma) = \{\gamma' \in G(F) |\ \gamma' \text{ は } \gamma \text{ と stable に共役}\}$$

を γ の stable な共役類と呼ぶ.

注意 3.10. $\mathcal{O}^{st}(\gamma)$ は $G(F)$ の共役類の有限個の合併になっている.

$\mathcal{O}^{st}(\gamma)$ に含まれる $G(F)$ の共役類の全体のなす集合を

$$\mathcal{O}^{st}(\gamma)/G(F)\text{-conj.}$$

で表すことにする. T を γ の中心化群 $\mathrm{Cent}(\gamma, G)$ とする. (γ が strongly regular semisimple なので T は G の極大 torus である)．このとき, $\mathcal{O}^{st}(\gamma)/G(F)$-conj. は次のようにして $H^1(F, T)$ と関係する. $\gamma' \in \mathcal{O}^{st}(\gamma)$ であれば, ある $g \in G(\overline{F})$ が存在して $\gamma' = g\gamma g^{-1}$ となる. このとき, γ, γ' が F-有理点であることから, 任意の $\sigma \in \Gamma_F$ に対して $g^{-1}\sigma(g) \in T(\overline{F})$ が成り立つことがわかる．よって, Γ の $T(\overline{F})$ に値を持つ 1-cocycle $\sigma \in \Gamma_F \mapsto g^{-1}\sigma(g)$ が得られる．この 1-cocycle の定める $H^1(F, T)$ の元 ($\mathrm{inv}(\gamma', \gamma)$ と書くことにする) は g の取り方によらない. また, 次が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}^{st}(\gamma)/G(F)\text{-conj.} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \ker[H^1(F,T) \longrightarrow H^1(F,G)] \\ \gamma' & \mapsto & \mathrm{inv}(\gamma', \gamma) \end{array}$$

(γ の共役類は $G(F)/T(F)$ と対応し, γ の stable な共役類は $G/T(F)$ と対応するので, 完全列 $H^0(F,T) \longrightarrow H^0(F,G) \longrightarrow H^0(F,G/T) \longrightarrow H^1(F,T) \longrightarrow H^1(F,G)$ から上の１対１対応が導かれるのだが, G が可換群ではないので 1-cocycle で書いている).

これで, $\mathcal{O}^{st}(\gamma)$ と共役類との差を $H^1(F,T)$ と $H^1(F,G)$ により表すことができたのだが, Langlands 関手性との関係をみたいので, これを Tate–Nakayam duality を使って次のように書き直す. まず pairing

$$X^*(T) \times T \longrightarrow \mathbb{G}_m$$

からカップ積

$$H^1(F, X^*(T)) \times H^1(F,T) \longrightarrow H^2(F, \mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\exp(2\pi\sqrt{-1}\,\cdot\,)} \mathbb{C}^\times$$

が導かれる. 一方, 完全系列

$$0 \longrightarrow X^*(T) \xrightarrow{2\pi\sqrt{-1}} X^*(T)\otimes\mathbb{C} \xrightarrow{\mathrm{Exp}} \hat{T} \longrightarrow 1$$

を考えることにより, 同形写像

$$\pi_0(\hat{T}^{\Gamma_F}) \xrightarrow{\sim} H^1(F, X^*(T))$$

が得られる. ここで, $\hat{T}^{\Gamma_F} = H^0(F,\hat{T}) = \{x \in \hat{T} | \, \sigma(x) = x, {}^\forall\sigma \in \Gamma_F\}$ である. よって, $\pi_0(\hat{T}^{\Gamma_F})$ の character group (Pontrjagin dual) を $\pi_0(\hat{T}^{\Gamma_F})^D$ と書くことにすると, 上のカップ積を使って

$$H^1(F,T) \simeq \pi_0(\hat{T}^{\Gamma_F})^D$$

であることが導かれる. $H^1(F,G)$ に対しても, 次の定理が知られている.

定理 3.11 (Kottwitz)**.**

$$H^1(F,G) \simeq \pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F})^D.$$

但し, $Z(\hat{G})$ は $\hat{G}$ の中心である.

$\hat{G}$ の定義のところで説明したように, $\hat{T}$ を $\hat{G}$ の極大 torus とみることができる. 但し, $\hat{T}$ と $\hat{G}$ の極大 torus との同一視の仕方は一意的ではなく, しかも, Γ_F の作用が一致するとは限らない. しかし, $Z(\hat{G}) \subset \hat{T}$ は同一視の仕方によらず一意的に定まり, しかも, Γ_F の作用も一致している. よって, 写像

$$\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F}) \longrightarrow \pi_0(\hat{T}^{\Gamma_F})$$

が得られるが, 実は, 次の図式が可換になっている.

$$\begin{array}{ccc} H^1(F,T) & \longrightarrow & H^1(F,G) \\ \big\downarrow\wr & & \big\downarrow\wr \\ \pi_0(\hat{T}^{\Gamma_F})^D & \longrightarrow & \pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F})^D \end{array}$$

よって,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{st}(\gamma)/G(F)\text{-conj.} &\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \ker[H^1(F,T) \longrightarrow H^1(F,G)] \\ &\simeq \ (\operatorname{coker}[\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F}) \longrightarrow \pi_0(\hat{T}^{\Gamma_F})])^D \end{aligned}$$

である. このことから, $s \in \hat{T}^{\Gamma_F}$ は

$$\mathcal{O}^{st}(\gamma)/G(F)\text{-conj.} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \ker[H^1(F,T) \longrightarrow H^1(F,G)]$$

の上の関数

$$\gamma' \in \mathcal{O}^{st}(\gamma) \mapsto \langle s, \mathrm{inv}(\gamma',\gamma)\rangle$$

を定めることがわかる. (但し $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は Tate–Nakayama duality から上のようにして定まる $\hat{T}^{\Gamma_F}$ と $H^1(F,T)$ の pairing). よって, $\{J(\gamma') | \, \gamma' \in \mathcal{O}^{st}(\gamma)\}$ の線形結合全体のなす空間は,

$$\left\{ \sum_{\gamma' \in \mathcal{O}^{st}(\gamma)/G(F)\text{-conj.}} \langle s, \mathrm{inv}(\gamma',\gamma)\rangle \cdot J(\gamma') \,\middle|\, s \in \hat{T}^{\Gamma_F} \right\} \tag{3.1}$$

により生成されることがわかる. つまり
(3.2)

$$\sum_{\gamma' \in \mathcal{O}^{st}(\gamma)} \mathbb{C} \cdot J(\gamma') = \sum_{s \in \hat{T}^{\Gamma_F}} \mathbb{C} \cdot \left(\sum_{\gamma' \in \mathcal{O}^{st}(\gamma)/G(F)\text{-conj.}} \langle s, \mathrm{inv}(\gamma', \gamma) \rangle \cdot J(\gamma') \right).$$

である.

定義 3.12. Stable な軌道積分 $J^{st}(\gamma)$ を

$$J^{st}(\gamma, f) = \sum_{\gamma' \in \mathcal{O}^{st}(\gamma)/G(F)\text{-conj.}} J(\gamma', f), \quad f \in C_c^\infty(G(F))$$

により定義する.

命題 3.4 にならって, 次のように定義する.

定義 3.13. $C_c^\infty(G(F))$ の上の線形形式 J が stable であるとは, J が stable な軌道積分 $\{J^{st}(\gamma) | \gamma \in G(F)_{sreg}\}$ の (弱位相に関する) closed linear span に含まれることである. つまり,

$$C_c^{\infty, \mathcal{E}}(G(F)) = \{f \in C_c^\infty(G(F)) | \, J^{st}(\gamma, f) = 0, \, {}^\forall\gamma \in G(F)_{sreg}\}$$

とおいて, $J(C_c^{\infty,\mathcal{E}}(G(F))) = 0$ のとき, J を stable と呼ぶのである.

上の (3.1) の

$$\sum_{\gamma' \in \mathcal{O}^{st}(\gamma)/G(F)\text{-conj.}} \langle s, \mathrm{inv}(\gamma', \gamma) \rangle \cdot J(\gamma')$$

は $s = 1$ のとき γ の stable な軌道積分になっている. 上の (3.1) の各々を扱うのが standard endoscopy である.

4. Standard endoscopy (geometric side)

さて, $s \in \hat{T}^{\Gamma_F}$ から endoscopic data を作ろう. まず, W_F 上の埋め込み $\eta : {}^L T \longrightarrow {}^L G$ を固定しておく. ($\hat{T}$ を $\hat{G}$ の極大 torus とみなしたとき, W_F の $\hat{G}$ への作用を $\hat{T}$ に制限したものと W_F の $\hat{T}$ への作用は一般的には異なっているが, η は存在する). ここで, ${}^L G$ の部分群 $\mathcal{H}$ を

$$\mathcal{H} = \mathrm{Cent}(\eta(s), \hat{G})^0 \cdot \eta({}^L T)$$

とおくと, $\mathcal{H}$ はある quasi-split な conncected reductive group H の L-群に "似た" 群になっている. (但し, $\mathrm{Cent}(\eta(s), \hat{G})^0$ は $\mathrm{Cent}(\eta(s), \hat{G}) = \{g \in \hat{G} | \, \mathrm{Ad}(\eta(s))(g) = g\}$ の 1 を含む連結成分). いま, $\xi : \mathcal{H} \longrightarrow {}^L G$ を自然な埋め込みとすると, 4 つ組

$$(H, \mathcal{H}, \eta(s), \xi)$$

が得られる. このような 4 つ組 $(H, \mathcal{H}, \eta(s), \xi)$ が endoscopic data である. 正確には次のように定義される.

定義 4.1 (Standard endoscopy)**.** Endoscopic data とは以下の条件をみたす 4 つ組 $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ のことである.

(1) H は F 上の quasi-split な connected reductive group.
(2) $\mathcal{H}$ は $\hat{H}$ の W_F による split extension

$$1 \longrightarrow \hat{H} \longrightarrow \mathcal{H} \overset{\leftarrow}{\longrightarrow} W_F \longrightarrow 1$$

で, W_F を $W_F \hookrightarrow \mathcal{H}$ により $\mathcal{H}$ の部分群とみたときの $\hat{H}$ への adjoint action が H の dual group としての W_F の作用と対応する.
(3) s は $\hat{G}$ の semisimple な元.
(4) $\xi\colon \mathcal{H} \longrightarrow {}^LG$ は $\mathcal{H}$ の W_F 上の埋め込み.
(5) $\mathrm{Cent}(s, \hat{G})^0 = \xi(\hat{H})$.
(6) $\mathrm{Ad}(s) \circ \xi = a_s \cdot \xi$, 但し a_s は W_F の $Z(\hat{G})$ に値を持つ trivial 1-cocycle.

注意 4.2. 定義 4.1 の条件 (6) は,

$$\mathrm{Ad}(zs) \circ \xi = \xi$$

となるような $z \in Z(\hat{G})$ が存在することと同値であるが, F が数体のときの定義と twisted endoscopy の定義を考慮して上の形に書いている.

注意 4.3. (2) により, $\mathcal{H}$ は $\hat{H}$ と W_F の半直積にはなるのだが, L-群ではないこともある. $\mathcal{H}$ が L-群にならない場合は, H の z-拡大と呼ばれる中心拡大を考える必要がある.

以下では, 簡単の為に, $\mathcal{H} = {}^LH$ と $\mathrm{Ad}(s) \circ \xi = \xi$ が成り立っていると仮定しておく.

ここで, $H(F)_{sreg}$ の stable な共役類と $G(F)_{sreg}$ の stable な共役類の対応について説明する.

定義 4.4. いま, $\gamma_H \in H(F)_{sreg}$ とし, $T_H = \mathrm{Cent}(\gamma_H, H)$ とする. また, $\gamma \in G(F)_{sreg}$, $T = \mathrm{Cent}(\gamma, G)$ とする. このとき γ_H が γ の norm であるとは, 次をみたす同形写像 $\eta\colon T_H \longrightarrow T$ が存在することである.

(1) $\eta(\gamma_H) = \gamma$. (これから η が F 上定義されていることが分かる).
(2) $\hat{T}_H$ を $\hat{H}$ の極大 torus と同一視するやり方と $\hat{T}$ を $\hat{G}$ の極大 torus と同一視するやり方は一意的ではないが, $\xi(\hat{T}_H) = \hat{T}$ でありしかも $\xi\colon \hat{T}_H \longrightarrow \hat{T}$ が $\eta^{-1}\colon T \longrightarrow T_H$ の dual と一致するような同一視のやり方が存在する.

注意 4.5. “Norm” は Kottwitz–Shelstad [KS99] で twisted endoscopy に対して使われている用語で, 通常は “image” が使われている. 本稿では, 通常の意味の写像の image と混乱しないように “norm” を使っている.

注意 4.6. G, ψ を定理 3.7 のものとする. このとき, $H = GL_n$, $\mathcal{H} = {}^LG$, $s = 1$ とし, $\xi : \mathcal{H} \longrightarrow {}^LG$ を恒等写像とすると, endoscopic data $(GL_n, {}^LG, 1, \xi)$ が得られる. つまり, GL_n は G の endoscopic group である. また, 定義 3.6 の “norm” と定義 4.4 の “norm” は一致する.

定義 4.7. $H(\overline{F})$ の strongly regular semisimple な元 γ_H に対して, 定義 4.4 の (1), (2) の条件をみたす $G(\overline{F})$ の strongly regular semisimple な元 γ と同形写像

$$\eta: T_H = \mathrm{Cent}(\gamma_H, H) \longrightarrow T = \mathrm{Cent}(\gamma, G)$$

が存在するとき, γ_H は strongly G-regular semisimple であるという. (この定義の γ, γ_H は F-有理点とは限らないので, η は F 上定義されていなくてもよい). Strongly G-regular semisimple な $H(F)_{sreg}$ の元全体のなす集合を $H(F)_{G-sreg}$ であらわすことにする.

$\gamma_H \in H(F)_{G-sreg}$ が $\gamma \in G(F)_{sreg}$ の norm であるという関係により, $H(F)_{G-sreg}$ の stable な共役類と $G(F)_{sreg}$ の stable な共役類の間の対応関係が定まる.

注意 4.8. $\{J^{st}(\gamma_H) | \gamma_H \in H(F)_{G-sreg}\}$ の closed linear span は $C_c^\infty(H(F))$ 上の stable な線形形式全体のなす空間と一致する.

Langlands–Shelstad [LS87] は transfer factor と呼ばれる $H(F)_{G-sreg} \times G(F)_{sreg}$ 上の関数 $\Delta(\cdot, \cdot)$ を定義した. (Transfer factor $\Delta(\cdot, \cdot)$ は定数倍をのぞいて定義される). ここでは, 次の命題を述べるにとどめて, その定義については述べないことにする.

命題 4.9. *(1) $\Delta(\gamma_H, \gamma) \neq 0$ である為の必要十分条件は γ_H が γ の norm であることである.*

(2) $\gamma'_H \in \mathcal{O}^{st}(\gamma_H)$ であれば, $\Delta(\gamma'_H, \gamma) = \Delta(\gamma_H, \gamma)$.

(3) $\gamma' \in \mathcal{O}^{st}(\gamma)$ であれば,

$$\Delta(\gamma_H, \gamma') = \langle s, \mathrm{inv}(\gamma', \gamma) \rangle \Delta(\gamma_H, \gamma).$$

我々は, 写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Tran}_H^G: \ & H(F) \text{ 上の stable distribution の空間} \\ & \longrightarrow G(F) \text{ 上の invariant distribution の空間} \end{aligned}$$

を定めたいのであるが, まず, $\gamma_H \in H(F)_{G-sreg}$ の stable な軌道積分に対して次のように定義する.

定義 4.10. $\gamma_H \in H(F)_{G-sreg}$ に対して $\mathrm{Tran}_H^G(J^{st}(\gamma_H))$ を

$$\mathrm{Tran}_H^G(J^{st}(\gamma_H)) = \sum_{\gamma \in G(F)_{sreg}/G(F)\text{-conj.}} \Delta(\gamma_H, \gamma) J(\gamma)$$

により定める.

注意 4.11. 命題 4.9 から, 定義 4.10 の右辺の 0 でない項は有限個であることがわかる.

$\mathcal{O}^{st}(\gamma)$ に関係する endoscopic data が全て条件 $\mathcal{H} \simeq {}^L H$ をみたしていれば, 定義 4.10 から, 式 (3.2) は次のように書き直すことができる. (一般には H の z-拡大を考える必要がある).

$$\sum_{\gamma' \in \mathcal{O}^{st}(\gamma)} \mathbb{C} \cdot J(\gamma') = \sum_{\substack{\text{Endoscopic data } (H, {}^L H, s, \xi) \\ \gamma_H:\ \gamma \text{ の norm}}} \mathbb{C} \cdot \mathrm{Tran}_H^G(J^{st}(\gamma_H)). \tag{4.1}$$

つまり, $\sum_{\gamma' \in \mathcal{O}^{st}(\gamma)} \mathbb{C} \cdot J(\gamma')$ は endoscopy の stable な軌道積分によって表すことができるのである.

定義 4.10 で $\gamma_H \in H(F)_{G-sreg}$ の stable な軌道積分に対して定義した Tran_H^G を $C_c^\infty(H(F))$ 上の stable な線形形式から $C_c^\infty(G(F))$ 上の invariant な線形形式への線形写像に延長できるかどうかが問題となるが, 延長できることを予想するのが次の transfer conjecture である.

予想 4.12 (Transfer conjecture)**.** 任意の $f \in C_c^\infty(G(F))$ に対して, $f^H \in C_c^\infty(H(F))$ で

$$J^{st}(\gamma_H, f^H) = \sum_{\gamma \in G(F)_{sreg}/G(F)\text{-}conj.} \Delta(\gamma_H, \gamma) J(\gamma, f), \quad {}^\forall \gamma_H \in H(F)_{G-sreg}$$

をみたすものが存在する.

この予想を認めれば, $C_c^\infty(H(F))$ 上の stable な線形形式 J_H に対して $C_c^\infty(G(F))$ 上の線形形式 $\mathrm{Tran}_H^G J_H$ を

$$\mathrm{Tran}_H^G J_H(f) = J_H(f^H)$$

により定めることができる. さて, 予想 4.12 を仮定して Tran_H^G が定義されると, 次のことが問題になる. (実際には, 次の問題は予想 4.12 と独立ではなく, 予想の解決と密接に関わっている問題である).

問題 4.13. *$\gamma \in G(F)$ が strongly regular semisimple ではない場合でも stable な共役類や norm や transfer factor が定義できて, 定義 4.10 のような式が成り立つか？*

問題 4.13 に関しては, 以下の場合に肯定的な結果がある.

- (G, H)-regular の場合: Kottwitz [Kot88], Langlands–Shelstad [LS90].
- Semisimple とは限らない regular element の場合: Langlands–Shelstad [LS90].
- 不分岐な古典群の unipotent element の場合: Assem, Waldspurger [Wal01].

Tran_H^G を distribution character からみた場合の予想を述べる前に, 次の節で inner form について説明する.

5. Inner form

G と G' の間に $\overline{F}$ 上の同形写像 ψ が存在したとする.

$$\psi : G \longrightarrow G'.$$

このとき, $G(F)_{sreg}$ の stable な共役類と $G'(F)_{sreg}$ の stable な共役類との対応について, もう少し詳しくみる. $\gamma \in G(F)_{sreg}$ の G での共役類は F 上定義された部分多様体になっているが, その ψ による像は F 上定義されるかどうか分からない. しかし, 任意の $\sigma \in \Gamma_F$ に対して, ある $g_\sigma \in G'(\overline{F})$ で,

$$\psi = \mathrm{Ad}(g_\sigma) \circ \sigma(\psi)$$

をみたすものが必ず存在していれば, γ の G での共役類の ψ による像も F 上定義されているので, ψ により $G(F)_{sreg}$ の stable な共役類と $G'(F)_{sreg}$ の stable な共役類とを対応させることができる.

定義 5.1. 次の条件をみたす (G, ψ) を G' の inner form と呼ぶ.

(1) $\psi : G \longrightarrow G'$ は $\overline{F}$ 上の同形写像.

(2) 任意の $\sigma \in \Gamma_F$ に対して, ある $g_\sigma \in G'(\overline{F})$ で

$$\psi = \mathrm{Ad}(g_\sigma) \circ \sigma(\psi)$$

をみたすものが存在する.

また, G' の 2 つの inner form (G_1, ψ_1) と (G_2, ψ_2) が同値であるとは, G_1 から G_2 への F 上定義された同形写像 i と $g \in G'(\overline{F})$ で

$$\psi_2 \circ i = \mathrm{Ad}(g) \circ \psi_1$$

をみたすものが存在することである.

任意の connected reductive group G に対して, quasi-split な connected reductive group G^* と $\overline{F}$ 上の同形写像 $\psi : G \longrightarrow G^*$ で, (G, ψ) が G^* の inner form となるものが存在することが分かっている. しかも (G^*, ψ^{-1}) は G の inner form として同値を除いてひとつに決まることも分かっている. このとき, ${}^LG$ と ${}^LG^*$ の間に自然な同形が存在するので, ${}^LG^*$ を ${}^LG$ と同一視することができる. G^*_{ad} を G^* の adjoint group $G^*/Z(G^*)$ とし, G^*_{sc} を G^*_{ad} の simply connected covering group とする. 同様に, $\hat{G}_{ad} = \hat{G}/Z(\hat{G})$ とし, $\hat{G}_{sc}$ を $\hat{G}_{ad}$ の simply connected covering group とする. このとき, G^*_{ad} の dual group は $\hat{G}_{sc}$ であり, G^*_{sc} の dual group は $\hat{G}_{ad}$ である. さて, (G, ψ) が quasi-split な群 G^* の inner form であれば, $\psi = \mathrm{Ad}(g_\sigma) \circ \sigma(\psi)$ をみたす $\{g_\sigma\}$ の G^*_{ad} での像は $H^1(F, G^*_{ad})$ の元を定める. 定理 3.11 により, $H^1(F, G^*_{ad})$ の元は, $Z(\hat{G}_{sc})^{\Gamma_F}$ の character を定めるので, 結局 (G, ψ) から $Z(\hat{G}_{sc})^{\Gamma_F}$ の character χ_G が定まる.

$$\begin{array}{ccccc} \{\ G^* \text{ の inner form }\}/_\sim & \overset{1:1}{\longrightarrow} & H^1(F, G^*_{ad}) & \simeq & (Z(\hat{G}_{sc})^{\Gamma_F})^D \\ (G, \psi) & \longrightarrow & \{g_\sigma\} & \longrightarrow & \chi_G \end{array}$$

注意 5.2. 注意 4.6 と同様に, $H = G^*$, $\mathcal{H} = {}^LG$ とし $\xi : \mathcal{H} \longrightarrow {}^LG$ を恒等写像とすると, endoscopic data $(G^*, {}^LG, 1, \xi)$ が得られる.

ここで, §3 の例をもう一度考察する. G を定理 3.7 のものとする. ($G(F) = GL_m(D)$ であった). このとき, (G, ψ) は GL_n の inner form である. いま, $\hat{G}_{sc} = SL_n(\mathbb{C})$ なので, (G, ψ) は $Z(SL_n(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の character χ_G を定めるが, それは, D の Hasse invariant から定まるものに一致している. また, G が SL_n の inner form の場合も同様である.

6. Standard endoscopy (spectral side)

さて, §4 の状況に戻り, Tran_H^G を distribution character からみた場合の予想について説明する. まず最初に, 表現が tempered の場合の予想を説明する.

定義 6.1. Langlands parameter $\phi\colon W_F \times SU_2 \longrightarrow {}^LG$ は $\phi(W_F)$ が有界のとき tempered であるという.

$\Phi(G)_{temp}$ と $\Pi(G)_{temp}$ を

$$\Phi(G)_{temp} = \{\phi \in \Phi(G) | \, \phi \text{ は tempered }\}$$
$$\Pi(G)_{temp} = \{\pi \in \Pi(G) | \, \pi \text{ は tempered }\}$$

により定める.

予想 6.2. $\phi \in \Phi(G)_{temp}$ ならば, $\Pi_\phi(G) \subset \Pi(G)_{temp}$ である.

予想 6.3. $\phi \in \Phi(G)_{temp}$ ならば, 空間

$$\sum_{\pi \in \Pi_\phi(G)} \mathbb{C} \cdot J(\pi)$$

の中の *stable* な *distribution* 全体のなす部分空間は 1 次元である. その部分空間の基底を選び $J(\phi)$ と書くことにする.

Langlands parameter ϕ に対して, 空間 $\sum_{\pi \in \Pi_\phi(G)} \mathbb{C} \cdot J(\pi)$ を式 (4.1) と類似した形に分解するのに必要な endoscopic data はどのようなものであるか考える. $(H, {}^LH, s, \xi)$ を endoscopic data とする. (簡単の為に $\mathcal{H} = {}^LH$, $\mathrm{Ad}(s) \circ \xi = \xi$ としておく). $H(F)$ の stable な virtual character から空間 $\sum_{\pi \in \Pi_\phi(G)} \mathbb{C} \cdot J(\pi)$ への lift が存在しなければならないのだから, ϕ が ${}^LH$ を経由しているはずである. つまり,

$$\begin{array}{ccc} {}^LH & \xrightarrow{\xi} & {}^LG \\ {\scriptstyle \phi_H}\uparrow & & {\scriptstyle \phi}\uparrow \\ W_F \times SU_2 & = & W_F \times SU_2 \end{array}$$

が可換となるような Langlands parameter ϕ_H が存在しなければならない. このとき, 定義 4.1 により, $s \in \mathrm{Cent}(\phi, \hat{G})$ であることと $\xi({}^LH) = \mathrm{Cent}(s, \hat{G})^0 \cdot \phi(W_F)$ であることが分かる. (簡単の為, $\mathrm{Ad}(s) \circ \xi = \xi$ としていた). よって,

$$C_\phi = \mathrm{Cent}(\phi, \hat{G})$$

とし, $s \in C_\phi$ が semisimple のときに $\mathcal{H} = \mathrm{Cent}(s, \hat{G})^0 \cdot \phi(W_F)$ とおいて endoscopy を考えればよいように思われる. しかし, Vogan [Vog93] の考察により G が quasi-split でない場合には C_ϕ は適切な群ではないことが分かった. 以下の定式化は Vogan [Vog93] の考えに従ったものである. (完全に [Vog93] と同じではない).

Inner form の同値類は $H^1(F, G^*_{ad})$ と 1 対 1 に対応し, G から $Z(\hat{G}_{sc})^{\Gamma_F}$ の character χ_G が定まるのであるから, inner form を考える場合は $\hat{G}_{sc}$ を考慮しなければならない. 本稿では, 次のように S_ϕ を定める.

$$S_\phi = \{s \in \hat{G}_{sc} | \ \mathrm{Ad}(s) \circ \phi = a_s \phi\}.$$

但し, a_s は W_F の $Z(\hat{G})$ に値をもつ trivial 1-cocycle である. また,

$$\mathcal{S}_\phi = S_\phi/S_\phi^0$$
$$\mathcal{Z}_\phi = \mathrm{Im}[Z(\hat{G}_{sc}) \longrightarrow \mathcal{S}_\phi]$$

とおく. s は $\hat{G}_{sc}$ の元ではあるが, s が semisimple であるときには, s の $\hat{G}$ への像から上のように $\mathcal{H}$ を定めて endoscopic data を与えることができる. また, χ_G は $\mathrm{Im}[Z(\hat{G}_{sc})^{\Gamma_F} \longrightarrow \mathcal{S}_\phi]$ の character の引きもどしであることが分かるが, その $\mathrm{Im}[Z(\hat{G}_{sc})^{\Gamma_F} \longrightarrow \mathcal{S}_\phi]$ の character の $\mathcal{Z}_\phi$ への延長を１つ固定して, それも χ_G と書くことにする. このような $\mathcal{Z}_\phi$ の character を一つ選んで, それも χ_G と書くことにする. いま, $\mathcal{S}_\phi$ の既約表現で central character の $\mathcal{Z}_\phi$ への制限が χ_G となっているものの同値類全体のなす集合を $\Pi(\mathcal{S}_\phi, \chi_G)$ と書くことにすると Langlands parameter ϕ が tempered の場合の予想は次のようになる.

予想 6.4 (Langlands–Vogan)**.** *$\phi \in \Pi(G)_{temp}$ とし, ϕ に関係する endoscopic data が全て条件 $\mathcal{H} \simeq {}^L H$ をみたしているとする. ($\mathcal{H} \simeq {}^L H$ とならない endoscopic data に対しては z-拡大を使った定式化が必要になる). このとき, １対１対応*

$$\begin{array}{ccc} \Pi_\phi(G) & \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} & \Pi(\mathcal{S}_\phi, \chi_G) \\ \pi & \longrightarrow & \rho_\pi \end{array}$$

で (π に対応する $\mathcal{S}_\phi$ の既約表現を ρ_π と書くことにする)

$$\mathrm{Tran}_H^G J(\phi_H) = c \times \sum_{\pi \in \Pi_\phi(G)} \mathrm{trace}\, \rho_\pi(s) \cdot J(\pi)$$

をみたすものが存在する. 但し, $c \in \mathbb{C}^\times$ は π によらない定数で, H は s と ϕ に対応する endoscopic group.

注意 6.5. 定数倍の不定性が残っているので, 予想 6.4 の１対１対応は, 一般には, 一意的に決まらない. G が quasi-split の場合は generic packet conjecture を仮定すれば Whittaker data を決めることにより１対１対応が定まる. Generic packet conjecture は $G = GL_n$ (Bernstein [Zel80]) と $G = U_3$ (Friedberg–Gelbart–Jaquet–Rogawski [FGJR99], Konno [Kon02]) の場合には証明されている.

$s \in \mathcal{S}_\phi$ と $\pi \in \Pi_\phi(G)$ との pairing を

$$\langle s, \pi \rangle = \mathrm{trace}\, \rho_\pi(s)$$

により定める.

注意 6.6. Stable な共役類の場合と比較すると, $\Pi_\phi(G)$ が stable な共役類の類似で $\langle s, \pi \rangle$ が transfer factor の類似であるとみることができる.

注意 6.7. G が quasi-split で $s = 1$ の場合を考えると,

$$\sum_{\pi \in \Pi_\phi(G)} \dim \rho_\pi \cdot J(\pi)$$

は stable でなければならない. これを $J(\phi)$ と定めるのが適当であろう.

注意 6.8. $\Pi(\mathcal{S}_\phi)$ を $\mathcal{S}_\phi$ の既約表現の同値類全体の集合とすると, G^* が split しているときは

$$\Pi(\mathcal{S}_\phi) \xleftrightarrow{1:1} \bigsqcup_{G:\text{ inner form of } G^*} \Pi_\phi(G)$$

が成り立つ. このように inner form の族の上の L-packet を考えることが endoscopy にとっては自然なことのようである.

予想 6.4 は次の場合に跡公式を使って証明されていた.

- SL_2 とその inner form : Labesse–Langlands [LL79].
- U_3: Rogawski [Rog90].

定理 6.9 (H. – H. Saito)**.** *SL_n の inner form に対して, 予想 6.4 は正しい.*

注意 6.10. 跡公式を使って予想 6.4 を示そうとすると, fundamental lemma と呼ばれる予想が問題になる. Fundamental lemma は G と $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ が不分岐であるときに, $G(F)$ の hyperspecial maximal compact subgroup の特性関数 f と $H(F)$ の hyperspecial maximal compact subgroup の特性関数 f^H が予想 4.12 の式をみたすことを予想するものである. Fundamental lemma は以下の場合に証明されている.

- SL_n の場合: Waldspurger [Wal91].
- $U(3)$ の場合: Blasius–Rogawski [BR92].
- Sp_2 の場合: Hales [Hal97].
- 最近 $U(n)$ の場合が Laumon–Ngo により証明された.

注意 6.11. 予想 6.4 の主張のうち, $\Pi(\mathcal{S}_\phi, \chi_G)$ と $\Pi_\phi(G)$ との間に１対１の対応が存在するということだけであれば, いくつかの G と ϕ に対して証明されている. また, 予想 6.3 もいくつかの G と ϕ に対して証明されている.

Saito–Kurokawa lift の存在から, ϕ が non-tempered のときは L-packet だけを考えているのでは不十分であることが分かってきた. Arthur は $\Pi(G)$ のうちで大域的な保形表現の局所因子になると予想されるものについて, L-packet を拡張した A-packet の存在を予想した.

予想 6.12 (Arthur)**.** *ψ を W_F 上の準同形写像*

$$\psi : W_F \times SU_2 \times SL_2 \longrightarrow {}^L G$$

で ϕ と同様の条件をみたすものとする (ψ は A-parameter と呼ばれる). また, ψ に関係する endoscopic data が全て条件 $\mathcal{H} \simeq {}^L H$ をみたしているとする. ($\mathcal{H} \simeq {}^L H$ とならない endoscopic data に対しては z-拡大を使った定式化が必要になる). このとき, $\Pi(G)$ の有限部分集合 $\Pi_\psi(G)$ (A-packet と呼ばれる) で次の条件をみたすものが存在する.

(1) 空間 $\sum_{\pi \in \Pi_\psi(G)} \mathbb{C} \cdot J(\pi)$ のなかに 0 でない *stable* なものが存在する (１つ選んで $J(\psi)$ と書くことにする).

(2) Langlands parameter ϕ_ψ *を*

$$\phi_\psi(w,t) = \psi\left(w, t, \begin{pmatrix} |w|^{1/2} & \\ & |w|^{-1/2} \end{pmatrix}\right), \quad (w,t) \in W_F \times SU_2$$

で定めると,

$$\Pi_{\phi_\psi}(G) \subset \Pi_\psi(G)$$

である.

(3) $\mathcal{S}_\psi$ *を* $\mathcal{S}_\phi$ *と同様に定めるとき,* $\Pi_\psi(G)$ *から* $\mathcal{S}_\psi$ *の類関数への写像が存在する. (*$\pi \in \Pi_\psi(G)$ *に対応する* $\mathcal{S}_\psi$ *の類関数を* ρ_π *と書くことにする).*

(4) (1) の $J(\psi)$ *を上手くとると,*

$$\mathrm{Tran}_H^G(J(\psi_H)) = c \times \sum_{\pi \in \Pi_\psi(G)} \rho_\pi(s_\psi s) \cdot J(\pi)$$

が成り立つ. 但し, $s_\psi = \psi\left(1, 1, \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\right)$ *とし,* $c \in \mathbb{C}^\times$ *は* π *によらない定数で,* H *(resp.* ψ_H*) は予想 6.4 の場合と同様にして* s *と* ψ *から定まる endoscopic group (resp. A-parameter) とする.*

Tempered の場合と同様に,

$$\langle s, \pi \rangle = \rho_\pi(s), \quad s \in \mathcal{S}_\phi,\ \pi \in \Pi_\psi(G)$$

とおく.

注意 6.13. この予想は U_3 の場合には Rogawski [Rog90] により証明されている.

注意 6.14. G が split している場合でも $\Pi_\psi(G)$ の位数と $\Pi(\mathcal{S}_\psi, \chi_G)$ の位数が一致しない例があるということである.

7. 数体上の STANDARD ENDOSCOPY

この節では G を数体 F 上定義された connected reductive group とし, 大域的な endoscopy についての予想を説明する. $\mathcal{L}_F$ を Langlands 予想により存在が予想されている Langlands group とする. また, 非アルキメデス的な素点 v では $\mathcal{L}_{F_v} = W_{F_v} \times SU_2$ とし, アルキメデス的な素点 v では $\mathcal{L}_{F_v} = W_{F_v}$ とする. このとき, 大域的な A-parameter

$$\psi : \mathcal{L}_F \times SL_2 \longrightarrow {}^L G$$

から局所的な A-parameter

$$\psi_v : \mathcal{L}_{F_v} \times SL_2 \longrightarrow \mathcal{L}_F \times SL_2 \xrightarrow{\psi} {}^L G$$

が得られる (と予想される). よって, 予想 6.12 から F の各素点 v に対して A-packet $\Pi_{\psi_v}(G)$ が与えられる. さて, 各素点 v で $\Pi_{\psi_v}(G)$ から１つづつ表現 π_v をとる. 有限個の素点を除いて π_v が不分岐になるようにとれば, 制限直積 $\pi = \otimes'_v \pi_v$ を考えることにより $G(\mathbb{A})$ の表現が得られる. この表現 π は保形表現なのであろうか? 実際には π は必ずし

も保形表現にはならない．いつ π が保形表現になるのかを考察するのが大域的な endoscopy である．

局所体の場合と同様に $S_\psi, \mathcal{S}_\psi, \mathcal{Z}_\psi$ を定める．(同様といっても a_s に関する条件は少し異なる．[Art90, §4] の定義にならって a_s に関する条件を与えるのが適当であると思われるが，ここでは厳密な定義をしないことにする)．各素点 v において $S_\psi \subset S_{\psi_v}$ なので，準同形写像 $\mathcal{S}_\psi \longrightarrow \mathcal{S}_{\psi_v}$ が得られる．よって，$s \in \mathcal{S}_\psi$ に対して $\langle s, \pi_v \rangle$ が定まる．局所的な pairing $\langle\ ,\ \rangle$ を (有限個の素点を除いて) 上手く正規化しておくと，π_v が有限個の素点を除いて不分岐であるという条件から，$s \in \mathcal{S}_\psi$ に対しては有限個の素点を除いて $\langle s, \pi_v \rangle = 1$ であることがいえる．よって，pairing

$$\langle s, \pi \rangle = \prod_v \langle s, \pi_v \rangle$$

を定めることができる．さて，G の中心の 1 を含む連結成分を Z_G と書くことにし，$Z_G(\mathbb{A})/Z_G(F)$ の character μ を一つ固定しておく．${}^L D = (\hat{G}/\hat{G}_{der}) \rtimes W_F$ とすると，A-parameter ψ は

$$W_F \xrightarrow{\psi|_{W_F}} {}^L G \longrightarrow {}^L D$$

により $Z_G(\mathbb{A})/Z_G(F)$ の character μ_ψ を定める．A-parameter ψ のなかで，$\mu_\psi = \mu$ でしかも $\mathrm{Cent}(\psi, \hat{G})^0 \subset Z(\hat{G})$ をみたすものが (このとき ψ は elliptic であるという) $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}), \mu)$ の discrete spectrum を parametrize すると予想されている．($G(\mathbb{A})$ の $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}), \mu)$ への右正則表現を考えている)．

各素点 v で $G(F_v)$ の既約許容表現 π_v をとり，上と同様に有限個の素点を除いて π_v は不分岐であると仮定する．また，$\pi = \otimes' \pi_v$ とする．さて，elliptic な A-parameter ψ で，

(1) 全ての素点 v で $\pi_v \in \Pi_{\psi_v}(G)$,
(2) $\mu_\psi = \mu$,

となるものの同値類全体のなす集合を $\Psi(\pi, \mu)$ と書くことにする．(π の中心指標の $Z_G(\mathbb{A})$ への制限が μ と一致しなければ，$\Psi(\pi, \mu) = \emptyset$ である)．

注意 7.1. 局所的な A-parameter の同値類は $\hat{G}$ の adjoint action による軌道であったが，大域的な A-parameter の同値類の定義は少し異なっている．([Art90] を参照)．

注意 7.2. $|\Psi(\pi, \mu)| \geqq 2$ となることもある．

大域的な endoscopy についての予想は次のものである．

予想 7.3 (Arthur–Langlands)**.** *大域的に上手く pairing* $\langle\ ,\ \rangle$ *を正規化する方法が存在して，*$\pi = \otimes'_v \pi_v$ *の* $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}), \mu)$ *の discrete spectrum での重複度は*

$$\sum_{\psi \in \Psi(\pi,\mu)} \frac{1}{|\mathcal{S}_\psi|} \sum_{s \in \mathcal{S}_\psi} \epsilon_\psi(s) \langle s, \pi \rangle \tag{7.1}$$

で表される. 但し, $\epsilon_\psi : \mathcal{S}_\psi \longrightarrow \{\pm 1\}$ は ϵ-因子を使って定義される $\mathcal{S}_\psi$ の *character* である *(*[Art90, §4] を参照*)*.

注意 7.4. G が quasi-split の場合には, generic packet conjecture を仮定すれば, Whittaker model の理論を使って pairing $\langle\ ,\ \rangle$ を正規化することができる. G が quasi-split の場合には, この正規化により予想 7.3 が成り立つと予想されている.

予想 7.3 は Langlands 対応を含んでいるので, 現在のところは証明することが困難であるが, (7.1) と同様の形の重複度公式が成り立つことは次の場合に証明されている.

- SL_2 とその inner form: Labesse–Langlands [LL79].
- U_3: Rogawski [Rog90].

また, SL_n の inner form に関して次の結果を得た.

定理 7.5 (H. – H. Saito)**.** *$G = SL_n$ の場合, π が cuspidal な保形表現であれば, (7.1) と同様の形の重複度公式が成り立つ.*

また, G が SL_n 以外の SL_n の inner form の場合, π が cuspidal tempered な保形表現でいくつかの条件をみたせば, (7.1) と同様の形の重複度公式が成り立つ. (但し, この場合は, pairing $\langle\ ,\ \rangle$ の正規化はできていない).

References

[Art89] J. Arthur, Unipotent automorphic representations: conjectures. Orbites unipotentes et représentations, II. Astérisque 171-172 (1989), 13–71.

[Art90] ———, Unipotent automorphic representations: Global Motivation. Automorphic Forms, Shimura Varieties, and L-functions. Vol.1 1–75. Perspect. Math., 10, Academic Press, 1990.

[Ber84] J. N. Bernstein, P-invariant distributions on GL(N) and the classification of unitary representations of GL(N) (non-Archimedean case). Lie group representations, II (College Park, Md., 1982/1983), 50–102, Lecture Notes in Math., 1041, 1984.

[BZ77] I. N. Bernstein, and A. V. Zelevinsky, Induced representations of reductive p-adic groups. I. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 10 (1977), no. 4, 441–472.

[BR92] D. Blasius, and J. D. Rogawski, Fundamental lemmas for U(3) and related groups. The zeta functions of Picard modular surfaces, 363–394, Univ. Montréal, Montreal, QC, 1992.

[Bor79] A. Borel, Automorphic L-functions. Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, pp. 27–61, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[DKV84] P. Deligne, D. Kazhdan, and M.-F. Vignéras, Représentations des algèbres centrales simples p-adiques. Representations of reductive groups over a local field, 33–117, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984.

[FGJR99] S. Friedberg, S. Gelbart, H. Jacquet, and J. Rogawski, Représentations génériques du groupe unitaire à trois variables. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 329 (1999), no. 4, 255–260.

[Hal95] T. C. Hales, On the fundamental lemma for standard endoscopy: reduction to unit elements. Canad. J. Math. 47 (1995), no. 5, 974–994.

[Hal97] ——, The fundamental lemma for Sp(4). Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), no. 1, 301–308.

[Har78] Harish-Chandra, Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups. Lie theories and their applications pp. 281–347. Queen's Papers in Pure Appl. Math., No. 48, 1978.

[HT01] M. Harris, and R. Taylor, The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties. With an appendix by Vladimir G. Berkovich. Annals of Mathematics Studies, 151. 2001.

[Hen00] G. Henniart, Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $\mathrm{GL}(n)$ sur un corps p-adique. Invent. Math. 139 (2000), no. 2, 439–455.

[HH95] G. Henniart, and R. Herb, Automorphic induction for $\mathrm{GL}(n)$ (over local non-Archimedean fields). Duke Math. J. 78 (1995), no. 1, 131–192.

[Her95] R. Herb, Matching theorems for twisted orbital integrals. Pacific J. Math. 171 (1995), no. 2, 409–428.

[JL70] H. Jacquet, and R. P. Langlands, Automorphic forms on GL(2). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114. 1970.

[Kon02] T. Konno, Twisted endoscopy and the generic packet conjecture. Israel J. Math. 129 (2002), 253–289.

[Kot84] R. E. Kottwitz, Stable trace formula: cuspidal tempered terms. Duke Math. J. 51 (1984), no. 3, 611–650.

[Kot86] ——, Stable trace formula: elliptic singular terms. Math. Ann. 275 (1986), no. 3, 365–399.

[Kot88] ——, Tamagawa numbers. Ann. of Math. (2) 127 (1988), no. 3, 629–646.

[KS99] R. E. Kottwitz, and D. Shelstad, Foundations of twisted endoscopy. Astérisque 255 (1999).

[Lab85] J.-P. Labesse, Cohomologie, L-groupes et fonctorialité. Compositio Math. 55 (1985), no. 2, 163–184.

[LL79] J.-P. Labesse, and R. P. Langlands, L-indistinguishability for SL(2). Canad. J. Math. 31 (1979), no. 4, 726–785.

[Lan70] R. P. Langlands, Problems in the theory of automorphic forms. Lectures in modern analysis and applications, III, pp. 18–61. Lecture Notes in Math., Vol. 170, 1970.

[Lan79] ——, Stable conjugacy: definitions and lemmas. Canad. J. Math. 31 (1979), no. 4, 700–725.

[Lan83] ——, Les débuts d'une formule des traces stable. Publications Mathématiques de l'Université Paris VII , 13. 1983.

[LS87] R. P. Langlands, and D. Shelstad, On the definition of transfer factors. Math. Ann. 278 (1987), no. 1-4, 219–271.

[LS90] ——, Descent for transfer factors. The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 485–563, Progr. Math., 87, 1990.

[Ran72] R. Ranga Rao, Orbital integrals in reductive groups, Ann. of Math. **96** (1972), 505–510.

[Rog83] J. D. Rogawski, Representations of $\mathrm{GL}(n)$ and division algebras over a p-adic field. Duke Math. J. 50 (1983), no. 1, 161–196.

[Rog90] ——, Automorphic representations of unitary groups in three variables. Annals of Mathematics Studies, 123. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[Sha83] F. Shahidi, Some results on L-indistinguishability for $\mathrm{SL}(r)$. Canad. J. Math. 35 (1983), no. 6, 1075–1109.

[Sha74] J. A. Shalika, The multiplicity one theorem for GL_n. Ann. of Math. (2) 100 (1974), 171–193.

[Vog93] D. Vogan, The local Langlands conjecture. Representation theory of groups and algebras, 305–379, Contemp. Math., 145, (1993).

[Wal91] J.-L. Waldspurger, Sur les integrales orbitales tordues pour les groupes lineaires: un lemme fondamental. Canad. J. Math. 43 (1991), no. 4, 852–896.

[Wal97] ———, Le lemme fondamental implique le transfert. Compositio Math. 105 (1997), no. 2, 153–236.

[Wal01] ———, Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés. Astérisque No. 269 (2001).

[Zel80] A. V. Zelevinsky, Induced representations of reductive p-adic groups. II. On irreducible representations of $\mathrm{GL}(n)$. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 13 (1980), no. 2, 165–210.

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan
E-mail address: saito@math.kyoto-u.ac.jp

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan
E-mail address: hiraga@math.kyoto-u.ac.jp