Blow-up 代数の可換環論*

– Cohen-Macaulay 性解析の視点から –

後藤四郎（明治大学・理工学部）

1　はじめに

昨年の秋頃だったと思うのだが，2006 年度の代数学シンポジウムで講演をするよう，岡山大学の吉野雄二先生からお勧めを受け，散々迷った末にお引き受けした。「Blow-up 代数の可換環論」というタイトルで話をする決心をしていたのだが，準備を始めてすぐ分かったことは，確かに面白いし hot な話題なのだけれども，もう半分引退したような今の私には「いささか手に余るなあ」ということであった。今日では blow-up 代数関係の文献は非常に多岐に渡っていて，どの論文も実に面白く思える。そのため，全体像を手際よくお話しすることは，かえって難しい。しかしお引き受けした以上は後には引けないし，これでは十分でないと自分でも分かってはいるのだが，このタイトルで 27 年間を振り返りながら，私に見える範囲のお話をしたいと思う。

以下，A は可換な Noether 環とし，$I = (a_1, a_2, \cdots, a_d)$ をそのイデアルとする。このとき

定義 1.1. $\mathcal{R}(I) = A[It] = A[a_1t, a_2t, \cdots, a_dt] \subseteq A[t]$　（t は環 A 上の不定元）

とおき，イデアル I の Rees 代数（blow-up 代数）と呼ぶ。目的は $\mathcal{R}(I)$ の環構造解析にある。

まず基本的な事柄を整理しよう。Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ は $\mathbb{Z}$ 上の次数環（I が単項式イデアルのような場合など，環 A とイデアル I の選び方と目的に応じて，様々な次数付けが可能である。）であって，その次数付けは

$$[\mathcal{R}(I)]_n = \begin{cases} I^n t^n & \text{if } n \geq 0, \\ (0) & \text{if } n < 0 \end{cases}$$

*この文書は，後藤の雑な素案を西田康二氏，蔵野和彦氏，居相真一郎氏，川崎健氏，中村幸男氏，早坂太氏，櫻井秀人氏が点検し，加筆・訂正の上で完成して下さったものです。皆さんのご助力とご協力に対し，心からお礼申し上げます。

で与えられる。故に $\mathcal{R}(I)=\bigoplus_{n\geq 0} I^n$ であり，$[\mathcal{R}(I)]_0=A$ であるから，環 A を **環直和因子** に含む。また，$\mathcal{R}(I)$ を A-係数の t に関する多項式の集合として書くと

$$\mathcal{R}(I)=\left\{f(t)=\sum_{n\geq 0} c_i t^i \mid \text{すべての } i\geq 0 \text{ に対し } c_i\in I^i\right\}$$

となる。生成元を用いて $I=(a_1,a_2,\cdots,a_d)$ と書くと，$\mathcal{R}(I)=A[a_1t,a_2t,\cdots,a_dt]$ であったので，$\mathcal{R}(I)$ は有限生成 A-代数であって Noether 環であり，その Krull 次元は下記の等式で与えられる。

補題 1.2 ([V], '76)**.**

$$\dim\mathcal{R}(I)=\begin{cases}\dim A+1 & \text{if } \dim A<\infty,\ I\not\subseteq\bigcap_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}A\ \ s/t\ \ \dim A/\mathfrak{p}=\dim A}\ \mathfrak{p},\\ \dim A & \text{otherwise.}\end{cases}$$

同様に

$$\mathcal{R}'(I)=\mathcal{R}(I)[t^{-1}]=A[It,t^{-1}]=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I^nt^n\subseteq A[t,t^{-1}],$$

$$\mathcal{G}(I)=\mathcal{R}'(I)/t^{-1}/\mathcal{R}'(I)\cong\mathcal{R}(I)/I\mathcal{R}(I)=\bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$$

$(I^n=A,\ \text{if } n\leq 0)$ とおき，これらをそれぞれイデアル I の拡大 Rees 代数，随伴次数環と呼ぶ。（D. Rees [R] が導入し，Krull の標高定理と Artin-Rees の補題の証明に鮮やかに使って見せた Rees 代数は，$\mathcal{R}'(I)$ の方である。）すると，$\mathcal{R}'(I)[t]=A[t,t^{-1}]$ であるから，$u=t^{-1}$ とおくと，$\mathcal{R}'(I)$ は，$u=0$ のとき $\mathcal{G}(I)$ であり，$u=1$ のとき A となり，環 A の deformation が得られる。これが，$\dim\mathcal{G}(I)=\dim A$ であり環 $\mathcal{G}(I)$ の構造の方が環 A のそれよりも（一般には）強い理由である。（例えば，環 $\mathcal{G}(I)$ が Cohen-Macaulay 環や Gorensetin 環なら，A もそうなると言ったこと。但し，Buchsbaum 性は遺伝しない。）

さて，$R=\mathcal{R}(I)$，$R_+=\sum_{n>0}R_n=\sum_{n>0}I^nt^n$ とおき $X=\{P\mid P$ は環 R の次数素イデアルで $R_+\not\subseteq P\}$ とおくと，空間 X には，各点の局所環が $\mathcal{O}_{X,P}=[R_{(P)}]_0\ (P\in X)$ で与えられるスキームの構造が入る。ここで，$R_{(P)}$ は環 R の P による斉次局所化，即ち，$R_{(P)}=\{\dfrac{a}{s}\mid a,s$ は環 R の斉次元で $s\notin P\}$ を表し，

$$[R_{(P)}]_0=\{\frac{a}{s}\mid a,s\text{ は環 }R\text{ の斉次元で }s\notin P\text{ であって}, a\neq 0\text{ なら }\deg\ a=\deg\ s\}$$

は，次数環 $R_{(P)}$ の 0 次斉次成分がなす局所環のことである。スキーム X を $\operatorname{Spec}A$ **の閉集合** $\mathrm{V}(I)$ **を中心とする blowing-up** と呼び，$X=\operatorname{Proj}\ R$ と書く。$X=\bigcup_{i=1}^d\ \operatorname{Spec}A[\frac{I}{a_i}]$ $(A[\frac{I}{a_i}]=A[\frac{x}{a_i}\mid x\in I])$ であるから，自然な射 $f:X\to\operatorname{Spec}A$ が定まり，この記号の下に，$f^{-1}(\mathrm{V}(I))=\operatorname{Proj}\ \mathcal{G}(I)$ となる。$\operatorname{Proj}\ \mathcal{G}(I)$ は，$\operatorname{Spec}A[\frac{I}{a_i}]$ 上では（つまり局所的には），$a_i=0$ で定義される超曲面である。

スキーム X は，幾何学的には非常に深く調べられていて，極めて重要な対象である。環 A の特異点解消とは，うまくイデアル I を選べば，スキーム $X = \mathrm{Proj}\ \mathcal{R}(I)$ は特異点を持たない，つまり X の各点の局所環 $\mathcal{O}_{X,P}$ が正則となるようにできることをいう。

現在ではこれら一群の blow-up 代数について，多くの深い研究がなされているから，可換環論の人にとっても違和感がなくなっているかも知れないが，1970 年代末，下田保博君がイデアルの Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ の環構造研究に着手した時点では，下記の命題 1.4 に述べる Barshay [Ba] や Valla [V] の結果の他には見るべきものが殆どなかった。この点，下田君の印象は私とは違ったものであったと思われるが，私自身はこのテーマの将来性に希望があったというか，実り豊かな数学が可能であるという確信があったわけではない。しかし実際には，次の簡単な例が示すように，それは非常に浅はかな判断であったと思われる。

体 k 上の d $(d \geq 1)$ 変数の多項式環 $A = k[X_1, X_2, \cdots, X_d]$ 内で，イデアル $I = (X_1, X_2, \cdots, X_d)$ の Rees 代数を造ると

例 1.3. $\mathcal{R}(I) = k[X_1, X_2, \cdots, X_d, Y_1, Y_2, \cdots, Y_d]/\mathrm{I}_2\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_d \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_d \end{pmatrix}$

となる。

ここで $\mathrm{I}_2\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_d \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_d \end{pmatrix}$ は，行列 $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_d \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_d \end{pmatrix}$ の 2 次の小行列式全体が生成する $2d$ 変数の多項式環 $B = k[X_1, X_2, \cdots, X_d, Y_1, Y_2, \cdots, Y_d]$ のイデアルを表す。

証明. 実際，環 $\mathcal{R}(I)$ 内では，$\mathrm{I}_2\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_d \\ X_1t & X_2t & \cdots & X_dt \end{pmatrix} = (0)$ であるから，A-代数の代入射 $\varphi : k[X_1, X_2, \cdots, X_d, Y_1, Y_2, \cdots, Y_d] \to \mathcal{R}(I), Y_i \mapsto X_it$ $(1 \leq i \leq d)$ は，イデアル $P = \mathrm{I}_2\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_d \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_d \end{pmatrix}$ をその kernel に含む。イデアル P は高さ $d - 2 + 1 = d - 1$ の完全素イデアルであることが知られているので，$\dim B/P = d + 1$ が得られ，環 $\mathcal{R}(I)$ も環 B/P も等しい次元 $d + 1$ を持つ整域であるから，$B/P \cong \mathcal{R}(I)$ であることが従う。 $\square$

ところで $\mathcal{R}(I) = k[X_1, X_2, \cdots, X_d, Y_1, Y_2, \cdots, Y_d]/\mathrm{I}_2\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_d \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_d \end{pmatrix}$ は，まず determinantal rings の一つであり，ASL であり，組み合わせ論的な対象であるが，代数群の不変式環でもあって，Segre 積 $k[X_1, X_2] \sharp k[Y_1, Y_2, \cdots, Y_d]$ (cf. [GW]) であって，その環構造は Cohen-Macaulay nomarl domains with isolated singularities; ck $k = 0$ の時には，isolated rational singularities であるなど，実に多様な視点から考察の対象になる (cf. [CB, BST, BV])。現在の Rees 代数研究はもっぱらこのような視点から行われていて，そのことが典型的な形でこの基本的な具体例 1.3 の中に現れているわけだから，短慮と言うものは仕方が無いものである。

より一般に次の主張が正しい。

命題 1.4 (J. Barshay [Ba], '73, G. Valla [V], '76). $a_1, a_2, \cdots, a_d$ が Noether 環 A 内の正則列, 即ち, (1) $(a_1, \cdots, a_{i-1}) : a_i = (a_1, \cdots, a_{i-1}),\ \forall\ 1 \le i \le d$, (2) $(a_1, \cdots, a_d)A \neq A$ という 2 条件を満たすような元の列であれば，イデアル $I = (a_1, a_2, \cdots, a_d)$ の Rees 代数は

$$\mathcal{R}(I) = A[Y_1, Y_2, \cdots, Y_d]/\mathrm{I}_2\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_d \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_d \end{pmatrix}$$

($A[Y_1, Y_2, \cdots, Y_d]$ は多項式環) で与えられ，環 A が Cohen-Macaulay なら，環 $\mathcal{R}(I^n) = [\mathcal{R}(I)]^{(n)}$ はすべての整数 $n \ge 1$ に対し Cohen-Macaulay となる。

証明. イデアル $\mathrm{I}_2\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_d \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_d \end{pmatrix}$ は，grade $d-1$ の完全イデアルである。$\mathcal{R}(I^n) = [\mathcal{R}(I)]^{(n)}$, 即ち環 $\mathcal{R}(I^n)$ は環 $\mathcal{R}(I)$ の n 次 Veronese 部分環 $[\mathcal{R}(I)]^{(n)} = \sum_{k \ge 0} [\mathcal{R}(I)]_{nk}$ と同一視されるので, n=1 の場合に帰着され，Hochster–Eagon [HE] の定理に従う。 □

そしてこれが 1970 年代後半までに知られていたことのほぼすべてであると思われる。

2 Blow-up 代数には冪 $\{I^n\}_{n \ge 1}$ 全体の情報が含まれている

一群の blow-up 代数の構造には，イデアル I だけではなく，その冪 $\{I^n\}_{n \ge 1}$ 全体の情報が含まれている。先に進む前に（というよりも，忘れないうちに）説明しておこう。次の結果がそのような例である。

定理 2.1 ([Br], '79). I を Noether 環 A のイデアルとすると，集合 $\bigcup_{n \ge 1} \mathrm{Ass}_A\, A/I^n$ は高々有限であって，十分大なるすべての自然数 n に対して等式 $\mathrm{Ass}_A\, A/I^n = \mathrm{Ass}_A\, A/I^{n+1}$ が成り立つ。

つまり，イデアル I^n を無駄なく準素分解したときに現れる素イデアルの個数は，$n \ge 1$ をすべて動かしても高々有限であって，n を十分大に取ると，同じものしか現れないのである。

証明. $\varphi : A \to G = \bigoplus_{n \ge 0} I^n/I^{n+1}$ を自然な射 $a \mapsto a \mod I$ とすると，$\mathrm{Ass}_A\, G = \{\varphi^{-1}(P) \mid P \in \mathrm{Ass}_G\, G\}$ であって，$\mathrm{Ass}_A\, G = \bigcup_{n \ge 1} \mathrm{Ass}_A\, A/I^n$ であるから，集合 $\bigcup_{n \ge 1} \mathrm{Ass}_A\, A/I^n$ は高々有限である。一方で，十分大なる n については，$\mathrm{Ass}_A\, A/I^n$ は $\mathrm{Ass}_A\, A/I^{n+1}$ に含まれるので，等式 $\mathrm{Ass}_A\, A/I^n = \mathrm{Ass}_A\, A/I^{n+1}$ が得られる。 □

このことから容易に次の結果が従う。他にも n が十分大なる範囲での I^n やその整閉包 $\overline{I^n}$ の asymptotic な挙動に関する多くの情報が得られる。blow-up 代数を考察する際の重要な視点の一つである。

系 2.2. A を正則局所環とし $I \subseteq A$ をそのイデアルとすると，射影次元 $\mathrm{pd}_A I^n$ は十分大なるすべての自然数 n に対して一定値を取る。

一方で拡大 Rees 代数 $\mathcal{R}'(I)$ は，D. Rees [R] が導入し Krull の標高定理（altitude theorem）の簡潔な証明と Artin-Rees の補題の証明を与えたことで有名であるが，整閉イデアルの解析でも重要な役割を果たす。

定義 2.3. 元 $x \in A$ がイデアル I 上で整であるとは，元 x が環 A 内で

$$x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_n = 0 \quad (n > 0,\ c_i \in I^i)$$

という形の等式を満たすことを言う。

イデアル I 上で整であるような環 A の元全体の集合 $\overline{I} = \{x \in A \mid x \text{ は } I \text{ 上で整}\}$ は，環 A のイデアルをなし，$I \subseteq \overline{I} = \overline{\overline{I}}$ が成り立つ。等式 $I = \overline{I}$ が成り立つとき，イデアル I は整閉であるという。環 $\mathcal{R}'(I)$ の $A[t, t^{-1}]$ 内での整閉包 $\overline{\mathcal{R}'(I)}$ は $A[t, t^{-1}]$ の次数部分環をなし，その斉次成分は $[\overline{\mathcal{R}'(I)}]_n = \overline{I^n} t^n \quad (n \in \mathbb{Z})$ で与えられる。

定義 2.4. $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環とし $I \subseteq A$ をそのイデアルとするとき，I が $\mathfrak{m}$-full であるとは，ある元 $x \in \mathfrak{m}$ が存在して等式 $\mathfrak{m}I : x = I$ が成り立つことをいう。

$\mathfrak{m}$-full イデアルは変わった性質を持つ。

命題 2.5 ([W], '87, [G3], '87)**.** I は Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ の $\mathfrak{m}$-full イデアルであって $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ を満たすならば，I を含む任意のイデアル J に対して，$\mu_A(I) \geq \mu_A(J)$ が成り立つ。従って，Q を環 A の巴系イデアルとするとき，Q が $\mathfrak{m}$-full なら，環 A は正則局所環であって，$\mu_A(\mathfrak{m}/Q) \leq 1$ が成り立つ。但し $\mu_A(*)$ は生成元の個数を表す。

証明. 完全列 $0 \to I/\mathfrak{m}I \to J/\mathfrak{m}I \xrightarrow{x} J/\mathfrak{m}I \to J/[xJ + \mathfrak{m}I] \to 0$ より

$$\mu_A(I) = \ell_A(I/\mathfrak{m}I) = \ell_A(J/[xJ + \mathfrak{m}I]) \geq \ell_A(J/\mathfrak{m}J) = \mu_A(J)$$

を得る。ここで $\ell_A(*)$ は組成列の長さを表す。故に，環 A の巴系イデアル Q が $\mathfrak{m}$-full なら，$\mu_A(\mathfrak{m}) \leq \mu_A(Q) = \dim A$ であるから，環 A は正則である。$\mathfrak{m}$-full イデアル Q に対し元 $x \in \mathfrak{m}$ を $\mathfrak{m}Q : x = Q$ となるようとると，$Q : x \supseteq Q : \mathfrak{m} = [\mathfrak{m}Q : x] : \mathfrak{m} = [\mathfrak{m}Q : \mathfrak{m}] : x \supseteq Q : x$ であるから，等式 $Q : x = Q : \mathfrak{m}$ が得られる。さて，$Q \neq \mathfrak{m}$ と仮定すると，$Q : x \subseteq \mathfrak{m}$ である。A は Gorenstein 環であるから，完全列 $0 \to [Q : \mathfrak{m}]/Q \to \mathfrak{m}/Q \xrightarrow{x} \mathfrak{m}/Q \to \mathfrak{m}/[x\mathfrak{m} + Q] \to 0$ より，等式 $\ell_A(\mathfrak{m}/[x\mathfrak{m} + Q]) = \ell_A([Q : \mathfrak{m}]/Q) = 1$ を得る。故に，$\mu_A(\mathfrak{m}/Q) \leq \ell_A(\mathfrak{m}/[x\mathfrak{m} + Q]) = 1$ である。 $\square$

定理 2.6 (**D. Rees**, '85, cf. [G3])**.** I が剰余体 $A/\mathfrak{m}$ が無限体であるような Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ の整閉イデアルなら，$I = \sqrt{(0)}$ であるかまたは I は $\mathfrak{m}$-full である。従って，Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ が整閉な巴系イデアル Q を含むなら，環 A は正則であって，$\mu_A(\mathfrak{m}/Q) \leq 1$ となる。

証明. 簡単のためにAは整域と仮定する。$(0) \neq I \subsetneq A$と仮定してよい。環$\mathcal{R}'(I)$の商体内での整閉包をSとし$u = t^{-1}$とおくと，SはKrull環であるから，無駄の無い準素分解$uS = \bigcap_{i=1}^{r} P_i^{(n_i)}$ (但し，P_iは環Sの高さ1の素イデアル，$P_i^{(n_i)} = P_i^{n_i} S_{P_i} \cap S$はその$n_i$階のsymbolic powerで，$n_i \geq 1$）をすることができる。$v_i$によって離散的付値環$(V_i = S_{P_i}, \mathfrak{n}_i = P_i V_i)$が定める離散的付値を表す。すると，$I = \overline{I}$であって$uS \cap A = \overline{I}$であるから，元$a \in A$について

$$a \in I \iff \text{任意の} 1 \leq i \leq r \text{について} v_i(a) \geq n_i$$

となる。さて，各$1 \leq i \leq r$について，$\mathfrak{m}V_i \neq \mathfrak{m}\mathfrak{n}_i$であるから，$\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{m}\mathfrak{n}_i$である。故に，環$A$の剰余体は無限体であるので，元$x \in \mathfrak{m}$を選んで，$x \notin \mathfrak{m}\mathfrak{n}_i$がすべての$1 \leq i \leq r$に対し成りたつようにできる。すると，$v_i(x) = v_i(\mathfrak{m}V_i)$ $(= \min\ \{v_i(y) \mid y \in \mathfrak{m}V_i\})$である。元$a \in A$について，$xa \in \mathfrak{m}I$ならば，$v_i(xa) \geq v_i(\mathfrak{m}I{\cdot}V_i) = v_i(\mathfrak{m}V_i) + v_i(IV_i) = v_i(x) + v_i(IV_i) \geq v_i(x) + n_i$であるから，$xa \in \mathfrak{m}I$なら，すべての$1 \leq i \leq r$に対し$v_i(a) \geq n_i$であることが得られ，$a \in I$であることが従う。故に$\mathfrak{m}I : x = I$である。 $\square$

3　局所環の分類 – どのような視点から解析を行うか

Rees代数$\mathcal{R}(I)$の環構造を解析するときには，どのような視点で調べるかということが重要である。現代可換環論は非常に専門化しているが，環構造解析の基盤が次の二つの系列にあることには，合意が得られるに違いない。第一行はhomology代数的視点からの階層化であり，第二行は代数幾何学的視点からの，第三行はtight closure (cf. [H]) の視点からの階層化である。

以下$(A, \mathfrak{m})$はNoether局所環とする。

正則環 ⇒ **完全交差環** ⇒ Gorenstein **環** ⇒ <u>Cohen-Macaulay</u>**環** ⇒ Buchsbaum **環**

正則環 ⇒ rational singularity ⇒ Cohen-Macaulay **正規環** ⇒ <u>Cohen-Macaulay</u>**環**

そして正標数の場合には，次を追加しなければならないであろう。

正則環 ⇒ F-regular ⇒ F-rational ⇒ Cohen-Macaulay **正規環** ⇒ <u>Cohen-Macaulay</u>**環**

正則局所環は極大イデアル$\mathfrak{m}$が次元個の元で生成されているような局所環のことであり，完全交差環は正則局所環を正則列で生成されたイデアルで割って得られる局所環のことであって，Gorenstein環とは自己入射次元が有限であるような局所環のことである。<u>Cohen-Macaulay</u>環とはその任意の巴系が正則列をなすような局所環のことであって，一つでも正則列をなすような巴系を含めば，その局所環は必ずCohen-Macaulay環となる (cf. [BH])。Buchsbaum局所環はCohen-Macaulay環の拡張概念の一つであって，すべての巴系がC. Hunekeの意味でd-列を成す，即ち等式$(a_1, \cdots, a_{i-1}) : a_i = (a_1, \cdots, a_{i-1}) : a_i a_j$が，任意の巴系$a_1, a_2, \cdots, a_d$ $(d = \dim A)$と任意の整数$1 \leq i \leq j \leq d$について成り立つような局所環のことをいう。この条件は，差

$\mathbb{I}(A) = \ell_A(A/Q) - \mathrm{e}_Q^0(A)$ が巴系イデアル Q のとり方によらない定数であって，環 A の不変量である（環 A の Buchsbaum 不変量という）ということと同値である (cf. [SV], '86)。ここで $\mathrm{e}_Q^0(A)$ は，環 A の Q に関する重複度を表す。rational singulariy は，特異点解消 $X \to \operatorname{Spec} A$（proper birational なスキームの射で X は特異点を含まない）で，$\mathrm{H}^i(X, \mathcal{O}_X) = (0), \forall i > 0$ となるものが存在するような正規局所環のことをいう。

Cohen-Macaulay 局所環とは，等式 $\dim A = \operatorname{depth} A$ が成り立つような局所環のことでもある。局所 cohomology

$$\mathrm{H}_\mathfrak{m}^i(A) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{Ext}_A^i(A/\mathfrak{m}^n, A) \quad (i \in \mathbb{Z})$$

の言葉で言えば，$\dim A$ と $\operatorname{depth} A$ は，次のように特徴付けられる。$\dim A = \sup\{i \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{H}_\mathfrak{m}^i(A) \neq (0)\}$, $\operatorname{depth} A = \inf\{i \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{H}_\mathfrak{m}^i(A) \neq (0)\}$. 従って $0 \leq \operatorname{depth} A \leq \dim A < \infty$ であって，環 A が Cohen-Macaulay 局所環であるとは $\mathrm{H}_\mathfrak{m}^i(A) = (0), \ \forall i \neq \dim A$ が成り立つことである。同様に，Gorenstein 環は，Cohen-Macaulay 局所環であってかつ $\mathrm{H}_\mathfrak{m}^d(A) \cong \mathrm{E}_A(A/\mathfrak{m})$ (剰余体の injective envelope, $d = \dim A$) で特徴付けることができる (cf. [BH])。また，環 A が Buchsbaum 局所環なら，$\mathfrak{m}\mathrm{H}_\mathfrak{m}^i(A) = (0), \forall\ i \neq d$ が成り立ち（逆は成立しない，cf. [SV]), Buchsbaum 不変量 $\mathbb{I}(A)$ は，等式

$$\mathbb{I}(A) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \cdot \ell_A(\mathrm{H}_\mathfrak{m}^i(A))$$

で与えられる。Buchsbaum 局所環は，Cohen-Macaulay 環の自然な拡張概念 (の一つ) であり，Cohen-Macaulay 局所環のクラスよりも (見方にもよるが) かなり広いクラスを成す（cf. [G1]）。

素イデアル $\mathfrak{p}$ による局所化 $A_\mathfrak{p}$ がすべて Cohen-Macaulay 局所環であるような Noether 環 A を，Cohen-Macaulay 環と呼ぶことにすると，Cohen-Macaulay 環は可換環論には勿論のこと，代数幾何学や特異点論，不変式論，組合せ論などに非常に豊富な具体例がある。Cohen-Macaulay 環の理論は，M. Hochster や C. Huneke, W, Bruns, J. Herzog 達によって，20 世紀最後の 30 年間に整備された。この営為には日本人研究者の寄与が少なくないことは強調すべきかもしれない。この意味で，現代可換環論は Cohen-Macaulay 環解析を中心課題にしながら成熟してきたと言っても言い過ぎではないので，語る間に，独断と偏見というか，猛烈な偏りが出てくる事を内心恐れるのではあるが，以下 Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ の Cohen-Macaulay 性解析を中心に，blow-up 代数の環構造解析のお話をしたいと思う。

4 Rees 代数の Cohen-Macaulay 性解析

Rees 代数の Cohen-Macaulay 性解析において最も重要な役割を果たしたのは，Hochster-Roberts の次の例である。

例 4.1 ([HR], ’74)**.** 体 k 上の多項式環 $k[s,t]$ の部分環 $A = k[s^2, t, s^3, st]$ 内のイデアル $I = (s^2, t)A$ の Rees 代数を $\mathcal{R}(I)$ とすると，環 A は Cohen-Macaulay ではないが，イデアル I の Rees 代数

$$\mathcal{R}(I) = k[s^2, t, s^3, st, s^2u, tu] \quad \subseteq \quad k[s,t,u]$$

は，Cohen-Macaulay 環である。ここで t, s, u は不定元である。

環 $B = k[s,t]$ はその部分環 A 上で整であるから，$\dim A = 2$ であり，$s^2{\cdot}st = s^3{\cdot}t$ であるが，$st \notin tA$ であるので，斉次巴系 t, s^2 は環 A 内では正則列を成さず，故に環 A は Cohen-Macaulay ではない。環 $k[s^2, t, s^3, st, s^2u, tu]$ が Cohen-Macaulay であることを示すには，多少作業が必要である (後で紹介する)。

Hochster と Roberts がこの例を提示した目的は，環の Cohen-Macaulay 性が **環直和因子** には保たれないことを示すことにあった。よく知られていることであるが，正則環の環直和因子は正則である（M. Hochster の結果らしい)。また，Cohen-Macaulay 性は加群としての **有限直和因子** に保たれる。すなわち，環 A が Cohen-Macaulay 環 B の部分環であって，A は A-加群として環 B の直和因子であってかつ B が有限生成 A-加群になっていれば，環 A は必ず Cohen-Macaulay となる（[HE], ’71)。この有限条件無しには，環直和因子でさえ Cohen-Macaulay 性は保たれない。この論文は,「正則環の linearly reductive な代数群による不変式環は，Cohen-Macaulay 環である」ことを証明した有名な論文である。linearly reductive な代数群による不変式環は作用を受ける元の環に対して，加群としては直和因子になっているから，標数が 0 の場合には「rational rings の加群直和因子は再び rational である」という Boutot [Bo] の定理により，標数が正の場合には「F-正則環の加群としての直和因子は，F-正則であって，従って Cohen-Macaulay 環である」という Hochster-Huneke の定理によって，現在は簡潔に証明される (cf. [H], ’96)。

脱線になるが，正則環の加群直和因子として現れる Noether 環 A は，必ず Cohen-Macaulay 環であるという主張は，非常に重要な発見である。環 A が体を含んでいるときはこれでよいとして，環 A が体を含んでいないときは，正しいかどうか，open であろうと思われる。まず部分環の次元が 3 の場合が問題である。

問題 4.2. 正則環の <u>**加群直和因子**</u> **として現れる Noether 環は，必ず Cohen-Macaulay 環であるか。**

下田保博君はこの例 4.1 を解析して，基礎環 A が Buchsbaum 環であることを発見し，次の端麗な定理を得た。

定理 4.3 ([S], ’79)**.** $(A, \mathfrak{m})$ を 2 次元の Noether 局所整域とすると，次の条件は同値である。

(1) A は Buchsbaum 環，すなわち $\mathfrak{m}\mathrm{H}^1_{\mathfrak{m}}(A) = (0)$ である。

(2) 環 A のすべての巴系イデアル Q に対し Rees 代数 $\mathcal{R}(Q)$ は Cohen-Macaulay 環である。

証明の概略を紹介したい。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) のみにする。$Q=(a,b)$ とし，$\mathrm{U}(a)=aA:b$ とおくと，イデアル $\mathrm{U}(a)$ は 2 次元 Cohen-Macaulay A-加群であって，任意の整数 $n>0$ に対し等式 $\mathrm{U}(a)\cap Q^n=aQ^{n-1}$ が成り立つ。このことより次数 $\mathcal{R}(Q)$-加群の完全列

$$0\to \mathrm{U}(a)\to \mathcal{R}(Q)/at{\cdot}\mathcal{R}(Q)\to \mathcal{R}_{A/U(a)}([(b)+\mathrm{U}(a)]/\mathrm{U}(a))\to 0$$

が得られる。ここで $\mathrm{U}(a)$ は自然な射影 $\mathcal{R}(Q)\to A$ を通して，自明に次数 $\mathcal{R}(Q)$-加群とみなす。環 $\mathcal{R}_{A/\mathrm{U}(a)}([(b)+\mathrm{U}(a)]/\mathrm{U}(a))$ は，1 次元の Cohen-Macaulay 局所環 $A/\mathrm{U}(a)$ の巴系イデアル $[(b)+\mathrm{U}(a)]/\mathrm{U}(a)$ の Rees 代数であるから，$A/\mathrm{U}(a)$ 上 1 変数の多項式環と同型であって，従って 2 次元 Cohen-Macaulay 環であり，故に上の完全列より環 $\mathcal{R}(Q)$ は Cohen-Macaulay であることが従う。 $\square$

例 4.1 は基礎環が Cohen-Macaulay でなくても，うまくイデアルを選んで Rees 代数を造れば，Cohen-Macaulay 環が得られることがあると理解すると，非常に示唆に富んだものになる。実際，下田の定理だけではなく，川崎による arithmetic Cohen-Macaulay 化定理 ([K1], '02) や F-rationality の Boutot 型定理に関する原–渡辺–吉田の反例 ([HWY1], '02) など，深いところでその後の研究に影響を与えたと思われる。

残念ながら下田君のこの論文は今や知るものが殆どないけれど，その後の Rees 代数の Cohen-Macaulay 性研究に非常に大きな影響を与えた。この定理を見れば誰でもやって見たくなることは，例えばこの定理の高次元化であり，極大イデアル $\mathfrak{m}$ の Rees 代数解析であろう。これらについては下記の結果がある。

定理 4.4 ([GS1], '80)**.** $(A,\mathfrak{m})$ は Noether 局所環で $\dim A=d$ なるものとすると，次の条件は同値である。

(1) A は Buchsbaum 環で $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A)=(0),\ \forall i\neq 1,d$ である。

(2) 環 A のすべての巴系イデアル Q に対し Rees 代数 $\mathcal{R}(Q)$ は Cohen-Macaulay 環である。

定理 4.5 ([GS2], '79)**.** $(A,\mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環で $\dim A=d\geq 1$ なるものとする。I は環 A の $\mathfrak{m}$-準素イデアルとすれば，次の条件は同値である。

(1) 環 $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay である。

(2) 環 $\mathcal{G}(I)$ は Cohen-Macaulay であって $\mathrm{a}(\mathcal{G}(I))<0$ である。

剰余体 $A/\mathfrak{m}$ が無限のときなど，環 A の巴系イデアル Q で I の reduction となるもの（ある整数 $n\geq 0$ に対し，等式 $I^{n+1}=QI^n$ が成り立つもの）が含まれているときは，次を追加することができる。

(3) 環 $\mathcal{G}(I)$ は Cohen-Macaulay であって，$I^d\subseteq Q$ が成り立つ。

ここで $M = \mathfrak{m}\mathcal{R}(I) + \mathcal{R}(I)_+$ で，$\mathrm{a}(\mathcal{G}(I)) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid [\mathrm{H}^d_M(\mathcal{G}(I))]_n \neq (0)\}$ とする。但し，$[\mathrm{H}^d_M(\mathcal{G}(I))]_n$ は，次数付き局所コホモロジー加群 $\mathrm{H}^d_M(\mathcal{G}(I))$ の n 次斉次成分を表す。

従って，2 次元正則局所環 A 内の整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアル I の Rees 代数は，必ず Cohen-Macaulay 環になる。さらに，Proj $\mathcal{R}(I)$ は高々有限個の特異点しか含まず，それらはすべて rational singularity であることが知られている。また，環 A が rational singularity であれば，条件 (3) 内の「$I^d \subseteq Q$」は必ず満たされるので（現在では Lipman の定理として知られる結果の一部であるが），rational singularity A 内の $\mathfrak{m}$-準素イデアル I については，随伴次数環 $\mathcal{G}(I)$ が Cohen-Macaulay 環であることと Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ が Cohen-Macaulay 環であることが同値であることは，1979 年には既に確認されていたと判断される。（この年に開催された the regional conference: Commutative algebra, Fairfax, Va., 1979 で，M. Hochster が連続講義をし，この事実を証明している。）

論文 [GS2] 内には他にも Rees 代数の Gorenstein 性について，同様の結果が述べられている。

定理 4.6 ([GS2], '79)**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Gorenstein 局所環で $\dim A = d \geq 2$ なるものとすれば，次の 2 条件は同値である。

(1) 環 $\mathcal{R}(\mathfrak{m})$ は Gorenstein である。

(2) 環 $\mathcal{G}(\mathfrak{m})$ は Gorenstein であって $\mathrm{a}(\mathcal{G}(\mathfrak{m})) = -2$ である。

環 A 内に巴系イデアル Q で極大イデアル $\mathfrak{m}$ の reduction となるものが含まれているときは，次の条件を追加することができる。

(3) 環 $\mathcal{G}(\mathfrak{m})$ は Gorenstein であって，$\mathfrak{m}^{d-1} = Q\mathfrak{m}^{d-2}$ であるが $\mathfrak{m}^{d-2} \neq Q\mathfrak{m}^{d-3}$ である。

これらの知見により，環 $\mathcal{R}(I)$ の構造は環 $\mathcal{G}(I)$ の構造とその a-不変量の挙動に帰着されることが発見され，そののち長期に渡って Rees 代数研究の指針の一つとなった。

上の定理 4.5 は今日では次のように拡張されている。

定理 4.7 ([TI], '89)**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環で $\dim A = d$ とする。I $(\neq A)$ は環 A のイデアルで $I \not\subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, As/t \dim A/\mathfrak{p} = \dim A} \mathfrak{p}$ なるものとすれば，次の条件は同値である。

(1) 環 $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay である。

(2) $\mathrm{H}^i_M(\mathcal{G}(I)) = [\mathrm{H}^i_M(\mathcal{G}(I))]_{-1}, \forall i \neq d$ であって $\mathrm{a}(\mathcal{G}(I)) < 0$ である。

このとき，A-加群としての同型 $[\mathrm{H}^i_M(\mathcal{G}(I))]_{-1} \cong \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A), \forall i \neq d$ が得られる。

系 4.8 ([TI], '89)**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環とする。I $(\neq A)$ は環 A のイデアルで $\mathrm{ht}_A I > 0$ なるものとすれば，次の条件は同値である。

(1) 環 $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay である。

(2) 環 $\mathcal{G}(I)$ は Cohen-Macaulay であって $\mathrm{a}(\mathcal{G}(I)) < 0$ である。

ここで $\mathrm{ht}_A(*)$ はイデアルの高さを表す。

即ち，後藤-下田の定理 4.5 は，イデアル I が $\mathfrak{m}$-準素でなくても成り立つのである。
定理 4.7 の証明はよく整理されかなり単純になっている。概略を記録しておきたい。

証明. $R = \mathcal{R}(I)$，$G = \mathcal{G}(I)$, $M = \mathfrak{m}R + R_+$ とおく。$\dim R = d+1$, $\dim G = d$ である。$L = R_+$ とすると，合成射 $R \to \mathcal{R}'(I) \to G$ の核 IR は次数 R-加群 $L(1)$ ($[L(1)]_n = L_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ によって，次数付けをずらして得られる次数 R-加群) と同型であるので，次数 R-加群の二つの完全列

$$0 \to L \to R \xrightarrow{p} A \to 0, \quad 0 \to L(1) \to R \to G \to 0$$

が得られる。但し $p : R \to A$ は自然な射影であって，環 A は自明に次数付けしている。($A_n = A$ if $n = 0$; $A_n = (0)$ if $n \neq 0$) この二つの完全列に局所コホモロジー函手を作用させると，2 種類の長完全列

$$(1)\ \cdots \to \mathrm{H}^i_M(L) \to \mathrm{H}^i_M(R) \to \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A) \to \mathrm{H}^{i+1}_M(L) \to \mathrm{H}^{i+1}_M(R) \to \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{m}}(A) \to \cdots,$$

$$(2)\ \cdots \to \mathrm{H}^i_M(L)(1) \to \mathrm{H}^i_M(R) \to \mathrm{H}^i_M(G) \to \mathrm{H}^{i+1}_M(L)(1) \to \mathrm{H}^{i+1}_M(R) \to \mathrm{H}^{i+1}_M(G) \to \cdots$$

が従う。さて環 R が Cohen-Macaulay なら，任意の $i < d$ に対し $\mathrm{H}^{i+1}_M(R) = (0)$ であるから，完全列 (1) より $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A) \cong \mathrm{H}^{i+1}_M(L)$ であって，次数加群 $\mathrm{H}^{i+1}_M(L)$ は 0 次斉次成分しか出現しないこととその斉次成分が $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A)$ と同型であることを得る。一方で完全列 (2) によれば，$\mathrm{H}^i_M(G) \cong \mathrm{H}^{i+1}_M(L)(1)$ である。故に $\mathrm{H}^i_M(G)$ $(i < d)$ は–1 次の斉次成分しか出現せず，それは $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A)$ と同型である。また完全列 (1), (2) より，完全列

$$0 \to \mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(A) \to \mathrm{H}^{d+1}_M(L) \to \mathrm{H}^{d+1}_M(R) \to 0, \quad 0 \to \mathrm{H}^d_M(G) \to \mathrm{H}^{d+1}_M(L)(1)$$

を得るが，よく知られていることであるが，$a(R) = -1$ であるから，$\mathrm{H}^{d+1}_M(L)$ は高々0 次までしか出現せず，故に $\mathrm{H}^d_M(G)$ は高々-1 次までしか現れない。即ち $\mathrm{a}(G) < 0$ であることがわかる。

さて逆に条件 (2) が満たされていると仮定しよう。R が Cohen-Macaulay 環となることを示すことが目的である。$i < d$ とする。完全列

$$(2) \quad \mathrm{H}^i_M(G) \to \mathrm{H}^{i+1}_M(L)(1) \to \mathrm{H}^{i+1}_M(R) \to \mathrm{H}^{i+1}_M(G)$$

内で $\mathrm{H}^i_M(G), \mathrm{H}^{i+1}_M(G)$ は高々-1 次以下であるから，斉次成分を考えることにより，任意の整数 $n \geq 0$ に対し A-加群の同型 $[\mathrm{H}^{i+1}_M(L)]_{n+1} \cong [\mathrm{H}^{i+1}_M(R)]_n$ が得られる。一方で, $n+1 > 0$ であるから，完全列

$$(1) \quad \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A) \to \mathrm{H}^{i+1}_M(L) \to \mathrm{H}^{i+1}_M(R) \to \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{m}}(A)$$

より，同型 $[\mathrm{H}^{i+1}_M(L)]_{n+1} \cong [\mathrm{H}^{i+1}_M(R)]_{n+1}$ が得られる。R-加群 $\mathrm{H}^{i+1}_M(R)$ は Artinian であるので，$n \gg 0$ では $[\mathrm{H}^{i+1}_R(R)]_n = (0)$ となる。故に上の議論より $[\mathrm{H}^{i+1}_M(R)]_n = (0)$, $\forall n \geq 0$ が従う。

$n<0$ とせよ。完全列 (2) より

$$(0)=[\mathrm{H}^i_M(G)]_{n-1}\to[\mathrm{H}^{i+1}_M(L)(1)]_{n-1}\to[\mathrm{H}^{i+1}_M(R)]_{n-1}$$

を得る一方で，完全列 (1) より同型 $[\mathrm{H}^{i+1}_m(L)(1)]_{n-1}=[\mathrm{H}^{i+1}_M(L)]_n\cong[\mathrm{H}^{i+1}_M(R)]_n$ が従う。故に任意の $n<0$ に対し，単射 $0\to[\mathrm{H}^{i+1}_M(R)]_n\to[\mathrm{H}^{i+1}_M(R)]_{n-1}$ が得られる。ここで G. Faltings [F] の定理によって，$i<d$ の範囲で $\mathrm{H}^i_M(G)$ は finitely graded，すなわち $\mathrm{H}^i_M(G)$ の 0 でない斉次成分は高々有限個しかないことを用いて，$i<d$ の範囲で $\mathrm{H}^{i+1}_M(R)$ も finitely graded であることが従い，$n<0$ の範囲で $[\mathrm{H}^{i+1}_M(R)]_n=(0)$ であることが分かる。故に $\mathrm{H}^{i+1}_R(R)=(0),\forall i<d$ となり，環 R は Cohen-Macaulay であることが証明される。 □

上に述べたように，これらの結果内の a-不変量の negativity に関する部分も，ある条件の下で取り除かれる（自動的に満たされる）ことが J. Lipman によって知られている。

定理 4.9 ([L], '94). $(A,\mathfrak{m})$ は正則局所環（より一般には pseudo-rational で十分）とし，$I\ (\neq A)$ は環 A のイデアルとする。このとき環 $\mathcal{G}(I)$ が Cohen-Macaulay なら，環 $\mathcal{R}(I)$ は必ず Cohen-Macaulay である。

証明. $I\neq(0)$ としてよい。$d=\dim A$ とおく。定理 4.7 の証明内の完全列 (1)

$$\mathrm{H}^d_M(L)\to\mathrm{H}^d_M(R)\to\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(A)\xrightarrow{\delta}\mathrm{H}^{d+1}_M(L)\to\mathrm{H}^{d+1}_M(R)\to0$$

を見ると，環 A が pseudo-rational($\Longleftrightarrow$ 環 A は正規局所環であってかつ任意の proper birational なスキームの射 $f:X\to\operatorname{Spec}A$ に対し，自然な射 $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(A)\to\mathrm{H}^d_E(X,\mathcal{O}_X)$ は同型である。但し $E=f^{-1}(\{\mathfrak{m}\})$ とする。) という仮定は，射 $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(A)\xrightarrow{\delta}\mathrm{H}^{d+1}_M(L)$ が単射であるということに対応していて（そのことと，rational singulariy は，従って正則局所環が pseudo-rational であるというのは，別のことであるが），定理 4.7 の証明より $\mathrm{H}^i_M(R)=(0),\forall i<d$ であるから，同型 $\mathrm{H}^d_M(L)\cong\mathrm{H}^d_M(R)$ が得られる。そこで整数 $n\geq0$ を取ると，定理 4.7 の証明内の完全列 (2) によれば，G は Cohen-Macaulay なので，単射 $0\to[\mathrm{H}^d_M(L)(1)]_{n-1}\to[\mathrm{H}^d_M(R)]_{n-1}$ が得られる。故に任意の整数 $n\geq0$ に対し，単射 $0\to[\mathrm{H}^d_M(R)]_n\to[\mathrm{H}^d_M(R)]_{n-1}$ を得る。$\mathrm{H}^d_M(R)$ は finitely graded，すなわち十分小さい整数 n に対しては $[\mathrm{H}^d_M(R)]_n=(0)$ であったから，任意の整数 $n\geq0$ に対し，$[\mathrm{H}^d_M(R)]_n=(0)$ となり，加群 $\mathrm{H}^{d+1}_M(L)$ は高々0 次以下であったので，完全列 (2)

$$\mathrm{H}^d_M(R)\to\mathrm{H}^d_M(G)\to\mathrm{H}^{d+1}_M(L)(1)$$

より，$\mathrm{a}(G)<0$ が従う。故に定理 4.7 により環 R は Cohen-Macaulay である。 □

Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ が Cohen-Macaulay 環となるようなイデアル I は非常に沢山存在している。やや特殊な例であるが，最近得られた松岡直之君と高橋亮君の結果を記録しておきたい。

定理 4.10 ([GMT], '06). $(A, \mathfrak{m})$ は Gorenstein 局所環で，$\dim A \geq 1$，$\mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(A) \geq 3$ なるものとする。このとき，環 A の任意の巴系イデアル Q をとって $I = Q : \mathfrak{m}^2$ とおけば，等式 $I^3 = QI^2$ が成り立ち，環 $\mathcal{G}(I)$ とイデアル I の fiber cone $\mathcal{F}(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n/\mathfrak{m}I^n$ は，Cohen-Macaulay 環である。$\dim A \geq 3$ なら環 $\mathcal{R}(I)$ も Cohen-Macaulay となる。

この定理は [CP, CHV, CPV] による次の結果の一つの拡張である（定理 2.6 参照)。

定理 4.11 (cf. [CP, CHV, CPV], '94, '95, [G3]). $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環とし，Q を環 A の巴系イデアルとし，$I = Q : \mathfrak{m}$ とおけば，次の 3 条件は互いに同値である: (1) $I^2 \neq QI$, (2) $\overline{Q} = Q$, (3) A は正則局所環で$\mu_A(\mathfrak{m}/Q) \leq 1$ である。

従って，A を Cohen-Macaulay 局所環で $\dim A \geq 1$ なるものとし，A は正則ではない，即ち $\mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(A) \geq 2$ と仮定し，環 A の巴系イデアル Q に対し $I = Q : \mathfrak{m}$ とおくと，等式 $I^2 = QI$ が成り立ち，環 $\mathcal{G}(I)$ と $\mathcal{F}(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n/\mathfrak{m}I^n$ は Cohen-Macaulay 環となる。もしも $\dim A \geq 2$ なら，環 $\mathcal{R}(I)$ も Cohen-Macaulay である。

自然な問いであると思うのだが

問題 4.12. イデアル I を，$I = Q : \mathfrak{m}^n$ $(n \geq 3)$ にすると，どのようになるのだろうか。

例えば，基礎環 A は正則局所環と仮定しても面白いと思う。基礎環 A を Cohen-Macaulay ではなく Buchsbaum 環にして得られた結果は，定理 5.1 で触れる。

5 Rees 代数の Buchsbaum 性解析

局所環 $(A, \mathfrak{m})$ が Buchsbaum なら，任意の巴系イデアル Q に対し，環 $\mathcal{G}(Q)$ と $\mathcal{R}(Q)$ はどちらも Buchsbaum であって, その局所 cohomology $\mathrm{H}^i_M(\mathcal{G}(Q))$ と $\mathrm{H}^i_M(\mathcal{R}(Q))$ (但し $M = \mathfrak{m}\mathcal{R}(I) + \mathcal{R}(I)_+$) も精密に計算されている ([G5, SV])。巴系イデアル Q の次に調べるべきイデアルは何かということになるが，ここではイデアル $I = Q : \mathfrak{m}$ を巡る話題を紹介したい。

環 $\mathcal{R}(I)$ や $\mathcal{G}(I)$ の Buchsbaum 性解析は，山岸規久道君や櫻井秀人君が精力的に取り組んでおられる。Cohen-Macaulay 性の自然な拡張とはいえ，Rees 代数の Buchsbaum 性解析には，Cohen-Macaulay 性とは違って一筋縄ではいかない面があり，かなり苦労しておられるようである。ここ数年間に知られたことを纏めて記録しておくと，下記のようになる。

定理 5.1 (cf. [Y1, Y2, GN2, GSa1, GSa2, GSa3, SY], '99–'06). $(A, \mathfrak{m})$ は Buchsbaum 局所環で $\dim A \geq 2$ であるか，または $\dim A = 1$ であるが $\mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(A) \geq 2$ であると仮定する。このとき十分大なる整数 $n \gg 0$ を選べば，任意の巴系イデアル $Q \subseteq \mathfrak{m}^n$ に対して，$I = Q : \mathfrak{m}$ とおくと，等式 $I^2 = QI$ が成り立ち，従って環 $\mathcal{R}(I)$，$\mathcal{G}(I)$ や fiber cone $\mathcal{F}(I) = \bigoplus_{\ell \geq 0} I^\ell/\mathfrak{m}I^\ell$ がすべて Buchsbaum 環となるようにできる。

これでは素っ気なさ過ぎて，多くの人の努力を軽んずるような気がするので，もう少し詳しくお話しよう。以下 $(A, \mathfrak{m})$ は Buchsbaum 局所環とする。山岸君 [Y1, Y2] と後藤–西田 [GN2] によって, 巴系イデアル Q に対し $I = Q : \mathfrak{m}$ とおいたとき (もう少し一般的なイデアルでよい), 等式 $I^2 = QI$ が成り立つなら，環 $\mathcal{R}(I)$, $\mathcal{G}(I)$ や $\mathcal{F}(I)$ がすべて Buchsbaum 環となるということが示されている。これらの結果を踏まえて櫻井君は, では「**いつ等式 $I^2 = QI$ が成り立つか**」という基本的な問いについて考察を進め, 上記の定理 5.1 に代表されるような多くの優れた結果を得ている ([GSa1, GSa2, GSa3])。これらの諸結果は Buchsbaum Rees 代数の存在を豊富に保証するものである。だが，いつでも等式 $I^2 = QI$ が成り立つというわけではなく ([GSa1, GSa2]), 基礎環が Cohen-Macaulay 環の場合とは異なり, たとえ $I = Q : \mathfrak{m}$ という特殊なイデアルであっても, Rees 代数の Buchsbaum 性解析は実はそう容易ではない。

櫻井君の地道な研究で鍵となる定理は, 巴系イデアル Q の可約指数 $\ell_A((Q : \mathfrak{m})/Q)$ と環 A の (後藤–鈴木 [GSu] の意味での) Cohen-Macaulay 型 $\mathrm{r}(A) = \sup\{\ \ell_A((Q : \mathfrak{m})/Q) \mid Q$ は巴系イデアル$\}$ に着目した，次の定理であった。

定理 5.2 ([GSa1]). *$(A, \mathfrak{m})$ は Buchsbaum 局所環で $\mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(A) \geq 2$ であると仮定する。Q を環 A の巴系イデアルとし, $I = Q : \mathfrak{m}$ とおく。このとき，もしも等式 $\ell_A((Q : \mathfrak{m})/Q) = \mathrm{r}(A)$ が成り立つなら，等式 $I^2 = QI$ が成り立つ。従って，環 $\mathcal{R}(I)$ 及び $\mathcal{G}(I)$ はどちらも Buchsbaum 環である。*

この定理は, Cohen-Macaulay 環上の結果である定理 4.11 の Buchsbaum 環への自然な拡張になっているだけではなく，非常に実際的であって，具体例を計算する際にも有用であり，その後の研究の方向を決定したといってよい。例えば, 定理 5.1 はこの定理から導かれるし，次の定理の証明にも，重要な役割を果たしている。

定理 5.3 ([GSa2]). *$(A, \mathfrak{m})$ は Buchsbaum 局所環で $\mathrm{e}_{\mathfrak{m}}(A) = 2$ であり, $\mathrm{depth} A > 0$ であると仮定する。このとき, 任意の巴系イデアル Q について, $I = Q : \mathfrak{m}$ とおくと, 等式 $I^2 = QI$ が成り立つ。故に環 $\mathcal{R}(I)$ と $\mathcal{G}(I)$ は Buchsbaum 環である。*

A が Buchsbaum 局所環で, $\mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(A) = 2$ であって $\mathrm{depth} A > 0$ であると仮定すると, $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A) = (0)$, $\forall i \neq 1, d$ が成り立つ ([G2])。このとき, 任意の巴系イデアル Q に対し, $\mathcal{R}(Q)$ は Cohen-Macaulay (従って Buchsbaum) である (cf. 定理 4.4)。また $\mathcal{G}(Q)$ も Buchsbaum である (cf. 定理 4.7)。一方で定理 5.3 は，環 $\mathcal{R}(I)$ も $\mathcal{G}(I)$ も Buchsbaum であることを示している。これらを背景に置いたとき，桜井君が提起した次の予想は正しそうに思えるのであるが，どんなものであろうか。

予想 5.4 (**櫻井秀人**). **環** A **は** Buchsbaum **局所環で** $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A) = (0)$, $\forall i \neq 1, d$ **であると仮定する。このとき, 任意の巴系イデアル** Q **に対して,** $I = Q : \mathfrak{m}$ **とおくと，環** $\mathcal{R}(I)$ **と** $\mathcal{G}(I)$ **は必ず** Buchsbaum **である。**

可約指数の解析と「**いつ等式 $I^2 = QI$ が成り立つか**」という問題は，イデアル論の研究課題として（blow-up 代数解析から離れても）独自の面白さと重要性がある。いつ等式 $I^2 = QI$ が成り立つかという問いの方は，櫻井君によって, Buchsbaum 環より条件の弱い FLC を持つ局所

環（すべての $i \neq \dim A$ に対し局所コホモロジー加群 $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A)$ が有限生成 A-加群であるような局所環のことである）上での解析がかなり進んでいる ([GSa4]) し，これらの研究を踏まえて，可約指数解析でもいくつか注目すべき結果が出て来ている。上記の研究から派生した後藤–櫻井による共同研究のうちで，Buchsbaum 局所環内の部分巴系で生成されるイデアル $\mathfrak{q}$ に対し $\mathfrak{a} = \mathfrak{q} : \mathfrak{m}$ としたときの環 $\mathcal{R}(\mathfrak{a})$ や $\mathcal{G}(\mathfrak{a})$ の Buchsbaum 性解析 ([GSa5]) が目下発展しつつあることも付記しておきたい。

Rees 代数の Buchsbaum 性については，後藤–下田タイプの定理 4.4 が成り立つかどうか，特殊な場合を除いて知られていない (cf. [G4])。例えば，Lipman の定理で Cohen-Macaulay 性を Buchsbaum 性に変えると，どうなるのだろうか。

問題 5.5. 環 A **は正則局所環，** I $(\neq A)$ **は環** A **のイデアルとする。このとき環** $\mathcal{G}(I)$ **が** Buchsbaum **なら環** $\mathcal{R}(I)$ **も** Buchsbaum **であるか。**

この問には，松岡直之君の結果があって，$\dim A = 2$ で $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ のときは，肯定的である。

定理 5.6 ([GM]). A は 2 次元正則局所環 (証明を見る限りでは，2 次元 rational singularity でよい) とし，I は環 A のイデアルで $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ なるものとし，環 A は巴系イデアル Q で I の reduction になっているものを含むと仮定すると，次の 3 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(I)$ は Buchsbaum 環である。

(2) $\mathcal{R}'(I)$ は Buchsbaum 環である。

(3) $\mathcal{G}(I)$ は Buchsbaum 環である。

このとき，$I^3 = QI^2$ であって，Buchsbaum-不変量に関する等式 $\mathbb{I}(\mathcal{R}(I)) = \mathbb{I}(\mathcal{R}'(I)) = \mathbb{I}(\mathcal{G}(I)) = \ell_A(I^2/QI)$ が成り立つ。（従って，環 $\mathcal{R}(I)$ が Cohen-Macaulay であるための必要十分条件は，環 $\mathcal{G}(I)$ が Cohen-Macaulay であることである。）

$\dim A > 2$ のときには，まだ反例も見つかっていないようである。

6 Rees 代数の Gorenstein 性解析

Rees 代数の Gorenstein 性についても，Cohen-Macaulay 性と同様に，後藤–下田タイプの定理（定理 4.6, [I]) が成り立ち，環 $\mathcal{R}(I)$ の Gorenstein 性は，環 $\mathcal{G}(I)$ の Gorenstein 性とその a-不変量の言葉で記述される。従って，環 $\mathcal{G}(I)$ の Cohen-Macaulay 性と Gorenstein 性の解析が本質的である。Cohen-Macaulay 性については第 7 節で触れたいと考えているが，中村幸男君・西田康二君 [GNN1, Ni] や B. Ulrich [PU]，W. V. Vasconcelos と学生達など，非常に多くの研究者によって，精密な理論が作られている。おかげで，随伴次数環 $\mathcal{G}(I)$ の Cohen-Macaulay 性判定はかなり容易になって来た。この節では Rees 代数の Gorenstein 性解析について話を深めよう。

以下環 A は Gorenstein 局所環 B の準同型像と仮定する。$\mathrm{K}_A = \mathrm{Ext}_B^t(A, B) \quad (t = \dim B - \dim A)$ とおき，環 A の canonical module（正準加群）という。環 A の Gorenstein 性は，A は Cohen-Macaulay 局所環であってかつ $\mathrm{K}_A \cong A$ という条件で特徴付けられる (cf. [BH])。この意味では，Gorenstein 環の理論は今日では canonical modules の理論の一部という位置づけにある。Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ の canonical module $\mathrm{K}_{\mathcal{R}(I)}$ の構造を決定することは，直ちに Rees 代数の Gorenstein 性判定に繋がるが，環 $\mathcal{R}(I)$ の Gorenstein 性解析は随伴次数環 $\mathcal{G}(I)$ の canonical module $\mathrm{K}_{\mathcal{G}(I)}$ の構造解析に帰着されるという，池田信君 [I] の次の結果の方が実際的で美しい。

定理 6.1 ([I], '86)**.** A は Noether 局所環とし，I $(\neq A)$ は環 A のイデアルで grade $I \geq 2$ なるものとする。$\mathcal{R}(I)$ が Cohen-Macaulay 環なら，次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(I)$ は Gorenstein 環である。

(2) $\mathrm{K}_A \cong A$ かつ $\mathrm{K}_{\mathcal{G}(I)} \cong \mathcal{G}(I)(-2)$ である。

一般に $\mathrm{a}(\mathcal{G}(I)) = -\min\{i \in \mathbb{Z} \mid [\mathrm{K}_{\mathcal{G}(I)}]_i \neq (0)\}$ であって，環 A が Cohen-Macaulay 局所環のときは，Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ の Cohen-Macaulay 性から随伴次数環 $\mathcal{G}(I)$ の Cohen-Macaulay 性が従うので，定理 6.1 から次が得られる。

系 6.2 ([I], '86)**.** A は Cohen-Macaulay 局所環とする。I $(\neq A)$ は環 A のイデアルで grade $I \geq 2$ なるものとすれば，次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(I)$ は Gorenstein 環である。

(2) $\mathcal{G}(I)$ は Gorenstein 環であって $\mathrm{a}(\mathcal{G}(I)) = -2$ である。

即ち環 $\mathcal{R}(I)$ の Gorenstein 性に関する後藤–下田の定理 4.6 も，Cohen-Macaulay 性と同様に，一般のイデアルについて成り立つのである。後藤–下田タイプの定理の主張するところは，$\mathcal{R}(I)$ の環構造が知りたければ対応する $\mathcal{G}(I)$ の環構造を解析しその a-不変量を求めよということである。以下，随伴次数環 $\mathcal{G}(I)$ の Gorenstein 性解析に焦点を絞って話を進めたい。

いつ環 $\mathcal{G}(I)$ は Gorenstein 環になるのだろうか。論文 [GI1] から抜粋しよう。I $(\neq A)$ は環 A のイデアルとし，$G = \mathcal{G}(I)$, $a = \mathrm{a}(G)$ とおく。環 G が Cohen-Macaulay のときに，次数 G-加群としての同型 $G(a) \xrightarrow{\sim} \mathrm{K}_G$ が存在すれば G は Gorenstein 環であるが，次の結果が示すように，そのためには,（あくまでも随伴次数環 G の特殊事情である），単射が存在すれば十分なのである。

定理 6.3 ([GI1], '00)**.** A は Gorenstein 局所環で G は Cohen-Macaulay 環である仮定すると，次の 3 条件は同値である。

(1) G は Gorenstein 環である。

(2) 次数 G-加群の単射 $G(a) \hookrightarrow \mathrm{K}_G$ が存在する。

(3) すべての $\mathfrak{p} \in \bigcup_{n\geq 1} \mathrm{Ass}_A A/I^n$ に対し随伴次数環 $\mathcal{G}(I_\mathfrak{p})$ は Gorenstein 環であって，等式 $a = \mathrm{a}(\mathcal{G}(I_\mathfrak{p}))$ が成り立つ。

集合 $\bigcup_{n\geq 1} \mathrm{Ass}_A A/I^n$ は有限である（定理 2.1）。条件 (3) がどのように使われるかは，後に解説する。

随伴次数環 G の Gorenstein 性解析においては，与えられたイデアルの様相から環 G の Gorenstein 性を判定する, 簡便かつ実際的な方法を見出すことが最重要の課題である。例えばイデアル I が equi-multiple の場合は（第 7 節の言葉でいうと，$\mathrm{ad}(I) = 0$，即ち，等式 $\lambda(I) = \mathrm{ht}_A I$ が成り立つ場合），環 G の Gorenstein 性は当該イデアルの言葉だけで次のように記述することができる。

定理 6.4 ([GI1], '00)**.** A は Gorenstein 局所環で，$\mathrm{ht}_A I > 0$ とし，環 G は Cohen-Macaulay 環と仮定する。環 A 内には正則列で生成されたイデアル Q でイデアル I の reduction となるものが含まれていると仮定する。このとき，環 G が Gorenstein であるための必要十分条件は，等式 $I^r = Q^r :_A I^r$が成り立つことである。但し，$r = \mathrm{r}_Q(I) := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0, I^{n+1} = QI^n\}$ である。（これを イデアル I の Q に関する reduction 数という。)

これらの結果はいづれも blow-up 代数の canonical modules の構造解析を通して得られたものである。J. Herzog–A. Simis–W. V. Vasconcelos を始めとして，多くの人々が blow-up 代数の canonical modules の構造を研究しているが，ここで言及している結果は，拡大 Rees 代数 $\mathcal{R}'(I)$ の canonical module $\mathrm{K}_{\mathcal{R}'(I)}$ の構造に関する次の定理である。

定理 6.5 ([GI1], '00)**.** 環 A は Serre の条件 (S_2) を満たす局所環 (即ち, $\mathrm{depth} A_\mathfrak{p} \geq \min\{\dim A_\mathfrak{p}, 2\}$, $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ が成り立つような局所環) であって（いつものように）Gorenstein 局所環の準同型像であると仮定せよ。このとき，次の 2 条件を満たす K_A の I-filtration $\omega = \{\omega_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ が唯一つ定まる。

(1) 十分小さな任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して $\omega_i = \mathrm{K}_A$ である。

(2) 次数 $\mathcal{R}'(I)$-加群として $\mathrm{K}_{\mathcal{R}'(I)} \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \omega_i$ である。

随伴次数環 G が Cohen-Macaulay なら，次数 G-加群として $\mathrm{K}_G \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \omega_{i-1}/\omega_i$ であり，さらに $\mathrm{ht}_A I > 0$ であって Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ も Cohen-Macaulay なら，次数 $\mathcal{R}(I)$-加群としての同型 $\mathrm{K}_{\mathcal{R}(I)} \cong \bigoplus_{i\geq 1} \omega_i$ が得られる。

定理 6.5 によって一意的に定まる K_A の I-filtration $\omega = \{\omega_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ を環 A の canonical I-filtration と呼ぶことにしよう。canonical I-filtration ω を決定することは，直ちに blow-up 代数の Gorenstein 性判定に繋がる。例えば，環 G が Cohen-Macaulay で $s = \mathrm{ht}_A I > 0$ であって，環 A 内に正則列で生成されたイデアル Q でイデアル I の reduction となるものが含まれている場合には，$\omega_i = Q^{i-s+r+1}\mathrm{K}_A :_{\mathrm{K}_A} I^r, \forall i \in \mathbb{Z}$ である。但し $r = \mathrm{r}_Q(I)$ とする。このように canonical

I-filtration ω を決定することによって（K_G の生成元の現れ方など，もう少し考察が必要ではあるが），定理 6.4 が得られている。

さて次に，イデアル I が正則列で生成された reduction Q を持つとは限らない場合を考察したい。イデアル I の reduction$Q$ が正則列で生成されるという条件を，次の様にほんの少しだけ歪めたものを考える。$s = \mathrm{ht}_A I$ とおく。環 A 内に $s+1$ 個の元 $a_1, a_2, \cdots, a_{s+1}$ で生成されているイデアル Q でイデアル I の reduction となるものが含まれていると仮定する。さらに最初の s 個 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ は正則列をなすと仮定し，$L = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ とおく。最後に，$\mathrm{ht}_A \mathfrak{p} = s$ であるようなすべての素イデアル $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)$ に対し，$I_\mathfrak{p} = L_\mathfrak{p}$ であると仮定する。このとき次が成り立つ。

定理 6.6 ([GI1], '00). A は d 次元 Gorenstein 局所環とすると，次の 2 条件は互いに同値である。

(1) G は Gorenstein 環である。

(2) depth $A/I \geq d-s-1$，$\mathrm{r}_Q(I) \leq 1$，かつ等式 $I = (QU :_A I) \cap U$ が成り立つ。

但し，U は I の unmixed part を表す，即ち $U = \mathrm{U}(I) := \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A s/t \ \ \dim A/\mathfrak{p} = \dim A/I} IA_\mathfrak{p} \cap A$ である。

随伴次数環 G の a-不変量はどのようにして計算されるのであろうか。詳しくは述べないが，環 G が Cohen-Macaulay の時には a-不変量を評価する a-不変量公式が深く研究されていて，環 G の a-不変量は reduction 数等の情報で計算できるようになっている。定理 6.6 の状況では，等式 $\mathrm{a}(G) = -s$ が成り立つことが知られている。

等式 $I = (QU :_A I) \cap U$ が成り立つかどうかの判定は決して容易ではないが，I が素イデアルの時には自動的に満たされるので，この場合には，随伴次数環の Gorenstein 性は数値条件のみで判定できる。[BM] によると，projective monomial varieties of codimension 2 の定義イデアルは，上の条件 (2) をすべて満たす。従って定理 6.6 により，projective monomial varieties of codimension 2 の定義イデアルの Rees 代数は，必ず Gorenstein 環である。

$\dim A = 1$ の場合は，本質的に定理 6.6 は [GNa] 内に見出される。ここでは $\dim A = 1$ のときは定理 6.6 が成り立つことを既知とし，定理 6.3 の条件 (3) を適用することにより，[GNa] 内の結果が高次元化される模様を観察しよう。以下，定理 6.6 内の (2) $\Rightarrow$ (1) の略証を与える。

証明． [GNN1] の判定法によって，「depth $A/I \geq d-s-1$ かつ $\mathrm{r}_Q(I) \leq 1$」という条件は，随伴次数環 G が Cohen-Macaulay であることを導く。（多少の考察は必要ではあるが）環 A/L を通すことにより，$s=0$ と仮定してよい。故にイデアル I の reduction Q は単項生成となる。さて $\mathfrak{p} \in \bigcup_{n \geq 1} \mathrm{Ass}_A A/I^n$ をとる。定理 6.3 により，$\mathcal{G}(I_\mathfrak{p})$ が環 Gorenstein であって等式 $\mathrm{a}(\mathcal{G}(I_\mathfrak{p})) = 0$ が成り立つことを示せば十分である。G は Cohen-Macaulay 環であるから，等式 $\bigcup_{n \geq 1} \mathrm{Ass}_A A/I^n = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I) \mid \dim A_\mathfrak{p} = \dim G(I_\mathfrak{p})/\mathfrak{p}G(I_\mathfrak{p})\}$ が成り立つ (cf. [GI1])。イデアル $Q_\mathfrak{p}$ はイデアル $I_\mathfrak{p}$ の reduction であり，一般に $\dim G(I_\mathfrak{p})/\mathfrak{p}G(I_\mathfrak{p})$ は $I_\mathfrak{p}$ の reduction の極小生成元の個数で抑えられるので，$\dim A_\mathfrak{p} \leq 1$ であることが分かる。$\dim A_\mathfrak{p} = 0$ の時は $I_\mathfrak{p} = L_\mathfrak{p} = (0)$

であるので，$G(I_\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p}$ であり，示したいことは明らかに成り立つ。$\dim A_\mathfrak{p} = 1$ と仮定しよう。$\mathrm{ht}_{A_\mathfrak{p}} I_\mathfrak{p} = 1$ の時は $U \not\subseteq \mathfrak{p}$ であるから，等式 $I = (QU :_A I) \cap U$ の両辺を素イデアル $\mathfrak{p}$ で局所化することによって，等式 $I_\mathfrak{p} = Q_\mathfrak{p} :_{A_\mathfrak{p}} I_\mathfrak{p}$ が得られる。故に $\mathrm{r}_{Q_\mathfrak{p}}(I_\mathfrak{p}) = 1$ である。イデアル $I_\mathfrak{p}$ は環 $A_\mathfrak{p}$ の $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$-準素イデアルであるので定理6.4を適用することが可能であって，環 $\mathcal{G}(I_\mathfrak{p})$ は Gorenstein となることが従う。また，a-不変量公式によって $\mathrm{a}(\mathcal{G}(I_\mathfrak{p})) = 0$ が得られる。さて $\mathrm{ht}_{A_\mathfrak{p}} I_\mathfrak{p} = 0$ の場合を考えよう。このとき，$U_\mathfrak{p} = \mathrm{U}(I_\mathfrak{p})$ であるから，等式 $I = (QU :_A I) \cap U$ の両辺を素イデアル $\mathfrak{p}$ で局所化することによって，等式 $I_\mathfrak{p} = (Q_\mathfrak{p}\mathrm{U}(I_\mathfrak{p}) :_{A_\mathfrak{p}} I_\mathfrak{p}) \cap \mathrm{U}(I_\mathfrak{p})$ が得られる。以上の考察によって，問題が $\dim A = 1$ の場合に帰着され，環 $\mathcal{G}(I_\mathfrak{p})$ は Gorenstein 環であってかつ等式 $\mathrm{a}(\mathcal{G}(I_\mathfrak{p})) = 0$ が成り立つことが従う。 □

今までは依然としてかなり特殊なイデアルについて考察を進めてきたが，一般のイデアルについてはどうだろうか。イデアル I が素イデアル，もっと一般に，イデアル I が height unmixed, 即ち $I = \mathrm{U}(I)$ であるときには，これらの定理をさらに拡張することができる。以下 A は d 次元 Gorenstein 局所環とし，イデアル I は height unmixed で $s = \mathrm{ht}_A I > 0$ なるものとする。イデアル Q はイデアル I の reduction でその生成系はある「良い」性質を持つと仮定する。(基礎環 A の剰余体が無限体の時には，そのような「良い」性質をもつ reduction が必ず存在する。) イデアル Q は ℓ 個の元で極小的に生成されていると仮定し，その最初の s 個の元で生成される Q の部分イデアルを L とおく。すると，その「良い」性質から，$\mathrm{ht}_A\mathfrak{p} = s$ であるようなすべての素イデアル $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)$ に対しイデアル $L_\mathfrak{p}$ はイデアル $I_\mathfrak{p}$ の reduction となるので，非負整数 $r = \max\{\mathrm{r}_{L_\mathfrak{p}}(I_\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I), s = \mathrm{ht}_A\mathfrak{p}\}$ が定まる。この量は generic reduction 数と呼ばれる。このとき次が成り立つ。

定理 6.7 ([GNN2]). A/I は Cohen-Macaulay 環とし，任意の素イデアル $\mathfrak{p} \in V(I)$ と任意の整数 $1 \le n \le \ell - s - 1$ に対し，次の二つの不等式

(*a*) depth $[A/I^n]_\mathfrak{p} \ge \min\{\ell - s - 1 - n, \mathrm{ht}_A\mathfrak{p} - s - n\}$,

(*b*) depth $A/I^n \ge d - s - n$

が成り立つと仮定する。このとき, 次の 2 条件は同値である。

(1) G は Gorenstein 環である。

(2) $r_Q(I) \le \ell - s - 1$ である。

定理 6.8 ([GI2], '05). G は Cohen-Macaulay 環であると仮定する。$1 \le i \le r - s + \ell$ であるような任意の整数 i に対し depth $A/[I^i + L] \ge \min\{d - s, d - s + r - i\}$ が成り立つなら

$$G \text{ は Gorenstein 環である} \iff I^r \supseteq L^r :_A I^r \text{かつ等式 } \mathrm{a}(G) = r - s \text{ が成り立つ}$$

となる。このとき $r = s - 2$ なら環 $\mathcal{R}(I)$ は必ず Gorenstein である。

7　環 $\mathcal{G}(I)$ の Cohen-Macaulay 性解析

環 $\mathcal{G}(I)$ の Cohen-Macaulay 性に関する結果を纏めて述べておこう。

系 4.8 により，環 $\mathcal{R}(I)$ の Cohen-Macaulay 性解析の大きな部分が環 $\mathcal{G}(I)$ のそれに帰着されるが，期待される通り後者の作業の方が概ね容易である。思想的には「むべなるかな」というか，そうであろうと思われるが，技術的な理由としては，$\mathcal{G}(I)$ の次元が $\mathcal{R}(I)$ のそれよりも 1 小さいことや，環 $\mathcal{G}(I)$ の巴系のかなりの部分が斉次元に取れるということが挙げられる。

では「どのような視点と方法で環 $\mathcal{G}(I)$ の構造解析を進めるか」ということが，次の問題となる。**次世代の課題**というべきこの問題について，S. Huckaba–C. Huneke [HH1], [HH2] が果たした役割は大きい。彼らはイデアル I の analytic deviation と呼ぶ不変量 $\mathrm{ad}(I) = \lambda(I) - \mathrm{ht}_A I$ ($\lambda(I) = \dim \mathcal{F}(I)$, $\mathcal{F}(I) = \oplus_{n \geq 0} I^n/\mathfrak{m}I^n$) を導入し，まず $\mathrm{ad}(I) \leq 2$ の場合に，環 $\mathcal{G}(I)$ の Cohen-Macaulay 性や Gorenstein 性解析を行った。環 A が Cohen-Macaulay なら，$\mathrm{ad}(I) \leq \dim A/I$ であり，$\mathrm{ad}(I)$ が小さい程，環 $\mathcal{G}(I)$ の解析は容易である。（ということに，今はしておこう。というのも，私の考えでは，$\mathfrak{m}$-準素イデアルの場合が **最後に出会う敵** として残るからである。）Huckaba と Huneke のこの試みは多くの研究者の関心を引き，彼らの結果を拡張しようとする様々な試みが継続的に成されたが，環 $\mathcal{G}(I)$ の Cohen-Macaulay 性に関する限り，後藤–中村–西田 [GNN1] によって一つの区切りが与えられた。その後，L. Ghezzi [Gh] は [GNN1] で扱われた条件を改良し，環 $\mathcal{G}(I)$ の depth を評価する公式を提出したが，現時点では依然として西田康二君の次の結果が最も一般的なものである。

定理 7.1. ([GNN1], [Gh], [Ni]) 環 A は Cohen-Macaulay 局所環と仮定し，$J = (a_1, a_2, \cdots, a_\ell)A$ はイデアル I の reduction とし，整数 $r \geq 0$ を一つ固定する。各 $0 \leq i \leq \ell$ に対し，$J_i = (a_1, a_2, \cdots, a_i)A$,　$r_i = \max\{0, i - \ell + r\}$ とおき，次の 4 条件を考える。

(a) $I^{r+1} = JI^r$ である。

(b) $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)$ で $\mathrm{ht}_A \mathfrak{p} = i < \ell$ ならば，$I^{r_i+1}A_\mathfrak{p} = J_i I^{r_i} A_\mathfrak{p}$ である。

(c) $0 \leq i < \ell - r$ ならば，任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ に対し $\operatorname{depth}(A/J_i : I)_\mathfrak{p} \geq \mathrm{ht}_A \mathfrak{p} - i$ が成り立ち，$0 < i < \ell$ で $I \not\subseteq \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_A A/J_{i-1}$ ならば，$a_i \notin \mathfrak{q}$ となる。

(d) 任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)$ と $1 \leq n < r$ に対し，$\operatorname{depth}(A/I^n)_\mathfrak{p} \geq \min\{\mathrm{ht}_A \mathfrak{p} - \ell + r - n, r - n\}$ である。

これらの 4 条件が全て満たされるなら，評価式

$$\operatorname{depth} \mathcal{G}(I) \geq \min\ \{\{d\} \cup \{\operatorname{depth} A/I^n + \ell - r + n \mid 1 \leq n \leq r\}\}$$

が得られる。特に条件 (d) を

(d)' 任意の $1 \leq n \leq r$ に対し $\operatorname{depth} A/I^n \geq d - \ell + r - n$ が成り立つ。

で置き換えると，環 $\mathcal{G}(I)$ は Cohen-Macaulay 環となる。

この定理はイデアル J がイデアル I の minmal reduction であってかつ等式 $\ell = \lambda(I)$ が成り立つ場合の解決を最終目標としていて，漸近的方法を提示したものである。不変量 $\mathrm{ad}(I)$ は表面には現れていないが，差 $\mathrm{ad}(I) = \lambda(I) - \mathrm{ht}_A I$ が大きくなればなるほど，(a) から (d) までの要請は，急速に強まって来る。

上の定理の記述は複雑であるが，特殊な状況ではかなり見易くなる。典型的な例を挙げておこう。まず $\ell = \mathrm{ht}_A I + 1$ の場合には，$r = 2$ と仮定して，次が得られる。

系 7.2. 環 A は Cohen-Macaulay 局所環とし，$s = \mathrm{ht}_A I$ とおく。さらに，次の条件を満たすような元 $a_1, \cdots, a_s, b \in I$ が存在すると仮定しよう。

(a) $I^3 = (a_1, \cdots a_s, b)I^2$ である。

(b) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Assh}_A A/I := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\ A \mid \dim A/\mathfrak{p} = \dim A\}$ ならば，$I^2 A_\mathfrak{p} = (a_1, a_2, \cdots, a_s) I A_\mathfrak{p}$ である。

(c) 元 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ は正則列をなす。

(d) 環 A/I は Serre の条件 (S_1) を満たす。

このとき，評価式 $\mathrm{depth}\, \mathcal{G}(I) \geq \min\{\mathrm{depth}\, A/I + s\, ,\, \mathrm{depth}\, A/I^2 + s + 1\}$ が得られ，環 A/I が Cohen-Macaulay 環であって $\mathrm{depth}\, A/I^2 \geq \dim A/I - 1$ ならば，環 $\mathcal{G}(I)$ は Cohen-Macaulay 環となる。

環 A が Gorenstein であって等式 $\ell = \mathrm{ht}_A I + 2$ が成り立つ場合には，$r = 1$ と取ることにより，次が得られる。

系 7.3. 環 A は Gorenstein 局所環であって，環 A/I は Cohen-Macaulay 環であると仮定し，$s = \mathrm{ht}_A I$ とおく。次の条件を満たすような元 $a_1, \cdots, a_s, b, c \in I$ が存在すると仮定せよ。

(a) $I^2 = (a_1, \cdots, a_s, b, c)I$ である。

(b) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Assh}_A A/I$ なら，$I A_\mathfrak{p} = (a_1, a_2, \cdots, a_s) A_\mathfrak{p}$ が成り立ち，$\mathfrak{q} \in \mathrm{V}(I)$ で $\mathrm{ht}_A \mathfrak{q} = s + 1$ なら，$I A_\mathfrak{q} = (a_1, a_2, \cdots, a_s, b) A_\mathfrak{q}$ となる。

(c) 元 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ は正則列であって，$I \not\subseteq \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_A A/(a_1, a_2, \cdots, a_s)A$ なら $b \notin \mathfrak{q}$ となる。

このとき，環 $\mathcal{G}(I)$ は Cohen-Macaulay 環である。

8 Arithmetic Cohen-Macaulay 化–川崎の定理

Hochster-Roberts の例 4.1 は，環 A がかなり悪いものであっても，うまくイデアル I を選べば，Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ が Cohen-Macaulay 環となり得ることを示したものである。この方向の研究は，次の川崎の定理として結実した。

定理 8.1 ([K1], '02)**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環とする。$d = \dim A \geq 1$ であって，非混合的（任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} \widehat{A}$ に対し等式 $\dim \widehat{A}/\mathfrak{p} = d$ が成り立つ）かつ $A \to \widehat{A}$ の fibers はすべて Cohen-Macaulay 環と仮定せよ。このとき，環 A 内には高さ正のイデアル I が含まれていて，その Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 環となる。

I としては，環 A の特殊な選び方をした巴系 $a_1, a_2, \ldots, a_d$ を用いて，$I = \prod_{i=2}^{d}(a_1, a_2, \cdots, a_i)$ とおくのである。

環 A が必ずしも局所環でないときは，次の形の定理となる。

定理 8.2 ([K2])**.** A は $\dim A \geq 1$ の Noether 環とする。環 A が下記の 5 条件を満たすなら，環 A 内には高さ正のイデアル I が含まれていて，その Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 環となる。

(1) 任意の有限生成 A-代数は catenary である。

(2) 任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ に対し $A_\mathfrak{p} \to \widehat{A_\mathfrak{p}}$ の *fibers* は全て Cohen-Macaulay 局所環である。

(3) 任意の有限生成 A-代数 B に対しその Cohen-Macaulay locus

$$\mathrm{CM}(B) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B \mid B_\mathfrak{p} \text{ は Cohen-Macaulay 環である } \}$$

は $\operatorname{Spec} B$ の開集合である。

(4) $\operatorname{ht}_A \mathfrak{p} = 0, \forall\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} A.$

(5) 函数 $f : \operatorname{Spec} A \to \mathbb{Z}$ で次の 2 条件を満たすものが存在する。

  (a) $P \subseteq Q$ なら $\operatorname{ht}_{A/Q} P/Q = f(P) - f(Q)$,

  (b) $f(P)$ は任意の $P \in \operatorname{Min} A$ に対し共通の値を取る。

但し $\operatorname{ht}_{A/Q} P/Q$ は環 A/Q 内の素イデアル P/Q の高さを表す。

これらを代数幾何学的に記述すると次の形の定理になる。

定理 8.3. 定理 8.2 内の条件 (1) から (3) を満たす Noether 環上，分離有限型なスキーム X に対しその Cohen-Macaulay 化 $Y \to X$ (proper birational なスキームの射で Y は高々Cohen-Macaulay 特異点しかもなたい) が存在する.

定理8.2の条件(1)から(3)は優秀環の定義の「正則」·「幾何学的に正則」と言う部分を「Cohen-Macaulay」に置き換えたものであり，雑な言い方であるが，可換環論・代数幾何学にあらわれる大抵のNoether環がこのくらいの条件は満たしている。従って，特異点解消とは違うが，非常に強い深い結果であると思う。川崎の定理には沢山の応用があると思うが，二つだけ述べておく。

系 8.4 ([K1], 02)**.** A はNoether環とする。環 A が dualizing complex を持つならば，環 A はGorenstein環の準同型像である。

この結果はR. Y. Sharpの予想と言われ，30年近くもの間openであったが，川崎君が最終的に証明を付けたものである。

証明. 環 A はdualizing complexを持つと仮定する。環 A は定理8.2内の条件(1)から(5)を満たすとしてよいので，環 $R=\mathcal{R}(I)$ がCohen-Macaulayとなるようなイデアル I が環 A に含まれる。環 R は有限生成 A-代数だから，R もdualizing complexを持つ。しかもこの場合は，環 R はCohen-Macaulayだから，環 R は必ずGorenstein環の準同型像であることが，I. Reiten [Re]によって既に27年前に証明されている。環 A は環 R の準同型像であるので，もちろん A もGorenstein環の準同型像である。 □

系 8.5 ([K2])**.** A はNoether環とする。環 A が定理8.2内の条件(1)から(3)を満たし，(5)(a)を満たす函数 f が存在するなら，環 A はCohen-Macaulay環の準同型像である。

9　イデアルのfiltrationとRees代数

Rees代数は本来はイデアルのfiltrationsに付随するものである。定義を復習しよう。

定義 9.1. A はNoether環とする。環 A のイデアルの族 $\mathcal{F}=\{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が環 A のa filtration of idealsであるとは，下記の3条件が満たされることをいう。(1) $F_n \supseteq F_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, (2) $F_0 = A$, (3) $F_mF_n \subseteq F_{m+n}$, $\forall m,n\in\mathbb{Z}$.

環 A に対しそのイデアルのfiltrations $\mathcal{F}$ が与えられれば，これに付随し3つの次数環

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}(\mathcal{F}) &= \sum_{n\geq 0} F_n t^n \subseteq A[t],\\
\mathcal{R}'(\mathcal{F}) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n t^n = \mathcal{R}(\mathcal{F})[t^{-1}] \subseteq A[t,t^{-1}],\\
\mathcal{G}(\mathcal{F}) &= \mathcal{R}'(\mathcal{F})/t^{-1}\mathcal{R}'(\mathcal{F})
\end{aligned}
$$

が定まる。これらをそれぞれ，$\mathcal{F}$ のRees代数，拡大Rees代数，随伴次数環と呼ぶことにする。
イデアルのfiltrations $\mathcal{F}$ の例としては，次のようなものを考えることが多い。

例 9.2. (1) $F_n = I^n$ (ideal-adic case), (2) $F_n = \overline{I^n}$ (integral closures), (3) $F_n = \widetilde{I^n} = \bigcup_{\ell>0}[(I^n)^{\ell+1} : (I^n)^{\ell}]$ (Ratliff-Rush closures), (4) $F_n = I^{(n)} = [I^n{\cdot}W^{-1}A]\cap A$ (symbolic powers). 但し (4) では，$W = A \setminus \bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min A/I}} \mathfrak{p}$ とする。この場合には $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ は $\mathcal{R}_s(I)$ と書くことが多い。

イデアルの filtrations に付随した Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ の環構造については，ideal-adic の場合と同様な理論構成が可能であって，例えば定理 4.7 は次のように書くこともできる。

定理 9.3 ([GN1], ’94)**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環で $d = \dim A$ なるものとする。$\mathcal{F}$ は環 A のイデアルの filtration とする。環 $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ は**有限生成** A**-代数**であって，$F_1 \subsetneq A$, $F_1 \not\subseteq \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{SpecA}, \dim \mathrm{A}/\mathfrak{p}=\mathrm{d}} \mathfrak{p}$（つまり $\dim \mathcal{R}(\mathcal{F}) = d+1$）と仮定すると，次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ は Cohen-Macaulay 環である。

(2) $\mathrm{H}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{M}}(\mathcal{G}(\mathcal{F})) = [\mathrm{H}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{M}}(\mathcal{G}(\mathcal{F}))]_{-1}$, $\forall i < d$ であって，$\mathrm{a}(\mathcal{G}(\mathcal{F})) < 0$ である。

但し $M = \mathfrak{m}\mathcal{R}(\mathcal{F}) + [\mathcal{R}(\mathcal{F})]_+$ とする。
このとき A-加群の同型 $[\mathrm{H}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{M}}(\mathcal{G}(\mathcal{F}))]_{-1} \cong \mathrm{H}^{\mathrm{i}}_{\mathfrak{m}}(\mathrm{A})$ $(i < d)$ が存在する。

この結果は Trung–池田の定理 4.7 の形式的拡張であるが，このようにしておかないと，symbolic Rees 代数などの Cohen-Macaulay 性解析（cf. [GN1]）には役に立たない。定理 7.1 の filtration 版は下記の通りである。

定理 9.4. F 環 A は Cohen-Macaulay 局所環であって，$0 \le \ell \in \mathbb{Z}$ とせよ。$a_1, a_2, \cdots, a_\ell$ は環 A の元で $a_0 = 0, a_1 \in F_{k_1}, \cdots, a_\ell \in F_{k_\ell}$ が成り立つと仮定する。但し，$k_1, k_2, \cdots k_\ell$ は正整数で $k_1 \ge k_2 \ge \cdots \ge k_\ell$ を満たすものである。このとき，各 $0 \le i \le \ell$ に対し，$J_i = (a_0, a_1, \cdots, a_i)A$, $K_i = k_0 + k_1 + \cdots + k_i$ とおき $(k_0 = 0)$，さらに，$0 \le r \in \mathbb{Z}$ を固定し，$0 \le i \le \ell$ に対し $N_i = K_i - K_\ell + r$ とおき，次の 4 条件を考える。

(a) 任意の $n > r$ に対し $F_n = \sum_{i=0}^{\ell} a_i F_{n-k_i}$ である。

(b) $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(F_1)$ で $\mathrm{ht}_A\, \mathfrak{p} = i < \ell$ ならば，任意の $n > \max\{0, N_i\}$ に対し $F_n A_{\mathfrak{p}} = \sum_{i=0}^{i} a_j F_{n-k_j} A_{\mathfrak{p}}$ である。

(c) $0 \le i < \ell$ で $N_i < 0$ なら，任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ に対し $\mathrm{depth}\,(A/[J_i : F_1])_{\mathfrak{p}} \ge \mathrm{ht}_A\, \mathfrak{p} - i$ が成り立ち，$i > 0$ であって $F_1 \not\subseteq \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_A\, A/J_{i-1}$ なら，$a_i \notin \mathfrak{q}$ である。

(d) $0 \le i < \ell$ で $n \le N_i$ なら，任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(F_1)$ に対し $\mathrm{depth}\,(A/F_n)_{\mathfrak{p}} \ge \min\{\mathrm{ht}_A\, \mathfrak{p}, \ell - i\}$ が成り立つ。

これらの 4 条件が全て満たされるなら，環 $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ は有限生成 A-代数であって，評価式

$$\mathrm{depth}\, \mathcal{G}(\mathcal{F}) \ge \min\{\, d\,\} \cup \{\mathrm{depth}\, A/F_n + i \mid 0 \le i \le \ell\,, n \le N_i\}$$

が得られる。

10　Symbolic Rees 代数の有限性問題

イデアルの filtration に付随した Rees 代数を解析しようと思うとき，**有限性**が深刻な問題となる。symbolic Rees 代数の有限生成性に関しては，次の問題が提起されている。

問題 10.1 (**Cowsik** [Cow]). **環 R は体上の多項式環であるか，または正則局所環であると仮定する。$\mathfrak{p}$ を環 R の素イデアルとするとき，symbolic Rees 代数 $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p}) = \sum_{n \geq 0} \mathfrak{p}^{(n)} t^n$ は，有限生成 R-代数であるか。**

この問題（というか，予想）は，素イデアル $\mathfrak{p}$ の集合論的完全交叉性を解析するための方便として提出され，後に検証するように，基礎体の標数が 0 の場合には既に幾つかの反例が構成されているが，正標数の場合には依然として未解決のままである。この節の後半に説明するが，Cowsik の問題と Hilbert の第 14 問題は密接に関連していて，両問題の現在知られている反例はすべて相互に繋がっている。具体的な例から入ろう。k を体とし，整数 $0 < a_1 < a_2 < a_3$ を $\mathrm{GCD}(a_1, a_2, a_3) = 1$ ととる。但し a_1, a_2, a_3 が生成する非負整数のなす半群 $H = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ は，丁度 3 元で無駄なく生成されていると仮定する。体 k 上に 2 つの多項式環 $k[X_1, X_2, X_3]$ と $k[t]$ を考え，k-代数の代入射 $\varphi : k[X_1, X_2, X_3] \to k[t]$ を $X_i \mapsto t^{a_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ によって定め，$\mathrm{Ker}\,\varphi := \mathfrak{p}_k(a_1, a_2, a_3)$ と書く。すなわち $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_k(a_1, a_2, a_3)$ は space monomial curve $C = \{(t^{a_1}, t^{a_2}, t^{a_3}) \mid t \in k\}$ の定義イデアルである。多項式環 $A = k[X_1, X_2, X_3]$ の高さ 2 の素イデアル $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_k(a_1, a_2, a_3)$ について，その symbolic Rees 代数 $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p})$ はいつも Noether 環であるのか，また，Noether 環であったとして，必ず Cohen-Macaulay 環になるかという問題は，後藤–西田–渡辺 [GNW] と森元真由美–後藤 [MG] によって，既に否定的に解決されている。

定理 10.2 ([MG], '92). ch $k = p > 0$ と仮定し，$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_k(n^2+2n+2, n^2+2n+1, n^2+n+1)$ $(n = p^e, e \geq 1)$ とすると，環 $R_s(\mathfrak{p})$ は Noether 環であるが Cohen-Macaulay 環ではない。同様に，$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_k(n^2, n^2+1, n^2+n+1)$ $(n = p^e \geq 3)$ に対しても，環 $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p})$ は Noether 環であるが，Cohen-Macaulay 環ではない。

定理 10.3 ([GNW], '94). $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_k(7n-3, (5n-2)n, 8n-3)$ $(n \geq 4, n \not\equiv 0 \mod 3)$ とすると，$\mathcal{R}_s(\mathfrak{p})$ は $k = \mathbb{Q}$ のときは A 上有限生成ではないが，ch $k = p > 0$ のときは必ず有限生成であってしかし $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p})$ は Cohen-Macaulay 環ではない。

即ち，定理 10.3 の環 $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p})$ は，基礎体 k の標数が 0 のときは，space monomial curve の定義イデアル $\mathfrak{p}$ に関する Cowsik の問題の反例となっている。しかしながら，space monomial curve の定義イデアルの symbolic Rees 代数については，重要な問題が残っていて，下記の予想がある。

予想 10.4. 上のように，$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_k(a_1, a_2, a_3)$ は space monomial curves の定義イデアルとする。

(1) $\mathrm{ch} k = p > 0$ **なら，k-代数 $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p})$ は有限生成である。**

(2) $\mathrm{ch} k = 0$ **で $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p})$ が有限生成 k-代数なら，環 $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p})$ は Cohen-Macaulay である。**

以下，この予想 10.4(1) に関し，若干の補足説明を行いたい。$\deg X_i = a_i$ と定めて環 $k[X_1, X_2, X_3]$ を $\mathbb{Z}$-次数付環とみなし，weighted projective space $\mathbb{P} = \operatorname{Proj} k[X_1, X_2, X_3]$ を考え，これを閉部分スキーム $V_+(\mathfrak{p})$ を中心に blow-up して得られた正規射影多様体を $X = X_k(a_1, a_2, a_3)$ と表し，その上の例外曲線を E とする。X 上の被約かつ既約な曲線 C が，条件 $\underline{C \neq E,\ C^2 < 0}$ を満たすとき，曲線 C を X 上の negative curve と呼ぶ。さて，多様体 X の全座標環 (Cox 環ともいう) $\mathrm{TC}(X) = \bigoplus_{L \in \mathrm{Cl}(X)} \mathrm{H}^0(X, L)$ は，素イデアル $\mathfrak{p}$ の拡大 symbolic Rees 代数 $\mathcal{R}'_s(\mathfrak{p}) = \mathcal{R}_s(\mathfrak{p})[t^{-1}]$ と一致する。Cutkosky [Cut] はこの事実に着目して，symbolic Rees 代数 $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p})$ の有限生成性問題に関し優れた結果を得ているが，Cutkosky の議論をより精密に解析すると，次の主張が正しいことがわかる。ここで，与えられた自然数 a_1, a_2, a_3 は固定して考えている。

定理 10.5 (蔵野和彦). 次の主張が正しい。

(1) 標数 0 のある体 k に対し，多様体 $X_k(a_1, a_2, a_3)$ が negative curve を含めば，任意の基礎体 k に対し，多様体 $X_k(a_1, a_2, a_3)$ は negative curve を含む。

(2) 整数 $a_1,\ a_2,\ a_3$ はどの二つ $a_i, a_j\ (i < j)$ も互いに素であって $\sqrt{a_1a_2a_3} \notin \mathbb{Z}$ であると仮定する。このとき，symbolic Rees 代数 $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p})$ が有限生成 k-代数なら，多様体 $X_k(a_1, a_2, a_3)$ は negative curve を含む。

(3) k は正標数の体とする。このとき，多様体 $X_k(a_1, a_2, a_3)$ が negative curve を含むなら，symbolic Rees 代数 $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p})$ は必ず有限生成 k-代数である。(なお，体 k の標数が 0 のときは，この主張 (3) は正しくない。実際，定理 10.3 における最も単純な例 $(a_1, a_2, a_3) = (25, 72, 29)$ は，標数 0 のとき negative curve を含むからである。)

従って，多様体 $X_{\mathbb{Q}}(a_1, a_2, a_3)$ が negative curve を含むなら，正標数の任意の体 k に対し symbolic Rees 代数 $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p})$ は有限生成 k-代数である。

蔵野和彦君と松岡直之君は目下計算機を使って，多様体 $X_{\mathbb{Q}}(a_1, a_2, a_3)$ 内の negative curve の存在を検証中である。今のところ彼らの計算結果はすべて，多様体 $X_{\mathbb{Q}}(a_1, a_2, a_3)$ が negative curve を含むことを示している。従って現時点では，予想 10.4 (1) より強い次の予想

予想 10.6 (蔵野和彦). 多様体 $X_{\mathbb{Q}}(a_1, a_2, a_3)$ は必ず negative curve を含む。

が正しいように思われる。とにかく，Cowsik の問題に対する反例は，基礎体の標数が正の場合は，非常に作りにくい。

問題 10.7 (Hilbert の第 14 問題，1900). k を体，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は体 k 上の不定元とし，M を体 k と有理関数体 $k(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の中間体とする。このとき，環 $M \cap k[X_1, \ldots, X_n]$ は，有限生成 k-代数であるか。

Hilbert の第 14 問題の最初の反例は，1956 年に永田雅宜先生 [N] によって構成された。永田の反例は最近の向井茂さんの仕事によって拡張され，非常に深く解析されている。永田の反例から，体 k 上の多項式環のイデアル I (但し，I は素イデアルではない) で，その symbolic Rees 代数 $\mathcal{R}_s(I)$ が基礎体 k 上有限生成でない例が構成される。P. Roberts [R1] は，完備化すると永田のイデアル I となる素イデアル $\mathfrak{p}$ を構成して，Cowsik の問題に最初の反例を与えた。永田の反例は基礎体の標数に依らないが，Roberts の方法は上のような素イデアル $\mathfrak{p}$ の存在を保証するとき Bertini の定理を使うため，Cowsik の問題の反例は標数 0 のときにしか確認できない。

Hilbert の第 14 問題の（永田の反例に次ぐ）新たな反例は，1990 年に Roberts [R2] によって発見されている。この例を用いても自然に Cowsik の問題への反例が得られるが，この新たな例でも，基礎体の標数が正の場合には symbolic Rees 代数は有限生成であり，Cowsik の問題に対する正標数の反例は得られない (蔵野和彦)。Roberts の反例はその後，宮西，小島，Freudenberg，黒田により非常に深く追跡されている。

space monomial curve の定義イデアル $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_k(a_1, a_2, a_3)$ に戻る。蔵野君は，素イデアル $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_k(a_1, a_2, a_3)$ に対し，体 k 上 6 変数の多項式環 T で symbolic Rees 代数 $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p})$ を部分環として含みかつ $T \cap Q(\mathcal{R}_s(\mathfrak{p})) = \mathcal{R}_s(\mathfrak{p})$ が成り立つものを構成している。（ここで $Q(\mathcal{R}_s(\mathfrak{p}))$ は環 $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p})$ の商体を表す。）この構成からわかることは，symbolic Rees 代数 $\mathcal{R}_s(\mathfrak{p})$ が体 k 上有限生成でないなら，それは必ず Hilbert の第 14 問題に対する新たな反例を与えることである。例えば，後藤–西田–渡辺の例 (定理 10.3) は，Hilbert の第 14 問題の反例ともなっている。

だがどの例をとっても，不思議に基礎体の標数が正の場合の Cowsik 問題への反例には到達しない。正標数の場合は，(たぶん Frobenius 写像の作用のおかげで) 標数 0 の場合よりも symbolic Rees 代数は少し大きくなり，そのために「良い生成元」が発生し，めでたく有限生成代数となるのであると推定される。

11　multi-Rees 代数・加群の Rees 代数

Rees 代数の概念はイデアルから加群に拡張され，固有の（しかしイデアルの場合に平行した）理論が展開され，特異点論への応用がある (T. Gaffeny [Ga, GaK] と S. L. Kleiman [K1] の他に，A. Simis–K. Smith–B. Ulrich [SSU]，Simis–Ulrich–W. V. Vasconcelos [SUV] を参照されたい) が, 国内には早坂太君くらいしか研究者はいないようである。間違いなく重要なテーマの一つである。

有限生成自由 A-加群 F の部分加群 M に対し，M の Rees 代数は $\mathcal{R}(M) = \mathrm{Im}\ (\mathrm{Sym}_A(M) \to \mathrm{Sym}_A(F))$ によって定義される (一般には，もっと面倒臭い定義である，cf. [EHU])。ここで $\mathrm{Sym}_A(*)$ は環 A 上の対称代数を表す。従って，F は rank r (≥ 1) の有限生成自由加群で，基底 $\{t_i\}_{1\leq i\leq r}$ を持つと仮定し，$S = \mathrm{Sym}_A(F) = A[t_1, t_2, \cdots, t_r]$ (r 変数の多項式環) とみなし，部

分加群 M を生成元を用いて $M = Ac_1 + \cdots + Ac_n$ と書き，$c_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{rj} \end{pmatrix}$ とすると

$$\mathcal{R}(M) = A[\sum_{i=1}^{r} c_{ij}t_i \mid 1 \leq j \leq n] \quad \subseteq \quad S = A[t_1, t_2, \cdots, t_r]$$

となる。$r = 1$ なら $M = I$ は環 A のイデアルで，上の意味での Rees 代数は今まで考えてきたイデアルの Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ に他ならない。環 A 内に有限個のイデアル $\{I_i\}_{1 \leq i \leq r}$ を取って $M = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_r \subseteq A^r = F$ とすると，multi-Rees 代数 $\mathcal{R}(I_1, I_2, \cdots, I_r)$ が得られる。加群の Rees 代数には，イデアルの Rees 代数（$r = 1$ の場合）と違って，**随伴次数環 が存在しない**。そのためといってよいと思うが，multi-Rees 代数や加群の Rees 代数の環構造には，不可解というか，非常に難しいところと同時に非常に奥の深い何かを感じる。

今の所は直接的に特異点論への応用を目指しているのではないが，必ずしも無目的に研究を進めているのではないことを示すため，はっきりした結果を一つ述べておきたい。$(A, \mathfrak{m})$ は正則局所環で $d = \dim A \geq 1$ なるものとし，剰余体 $A/\mathfrak{m}$ の A-加群としての極小自由分解 (正則巴系の Koszul complex) をとって，その n $(1 \leq n \leq d)$ 番目の syzygy を M_n と書くと

予想 11.1. Rees **代数** $\mathcal{R}(M_n)$ **は Cohen-Macaulay 正規環である。**

この予想は，$A = k[X_1, X_2, \cdots, X_d]$ (体 k 上の多項式環) であって $\mathrm{ch}\ k = 0$ のときは，Weyman により $\mathcal{R}(M_n)$ は rational，従って Cohen-Macaulay 正規環であることが示されているが，$\mathrm{ch}k = p > 0$ のときや一般の正則局所環の場合には，まだ未解決であると思われる。

$M_1 = \mathfrak{m}$ であるから，$n = 1$ なら例 1.3 のことである。$n = 2$ のときは後藤–早坂–蔵野–中村 [GHKN] によって，次が知られている。

定理 11.2 ([GHKN], '05)**.** Rees 代数 $\mathcal{R}(M_2)$ は Gorenstein UFD である。

定理 11.2 の証明は，まず随伴次数環の一般論を経由して，次元 d の正則局所環 $(A, \mathfrak{m})$ の問題を，剰余体 $k = A/\mathfrak{m}$ 上の多項式環 $k[X_1, X_2, \ldots, X_d]$ の問題に帰着させる。すると，Rees 代数 $\mathcal{R}(M_2)$ のある特別なイデアルに関する随伴次数環は，k 上の $2d$ 変数の多項式環 $k[A_1, \ldots, A_d, X_1, \ldots, X_d]$ の部分環 $k[A_1, \ldots, A_d][A_iX_j - A_jX_i \mid 1 \leq i < j \leq d]$ として現れる。この代数を調べるのが目的ではあるが，論文 [GHKN] 内には遥かに一般的で魅力的な新しい代数系が提示されている。以下この代数系について述べたい。まず少し記号を用意しよう。以下，B は Noether 環とし，$0 \leq \ell \leq m \leq n$ は整数とする。環 B 上の不定元を成分とする $m \times n$ 型の行列 $X = (X_{ij})$ に対し，X_ℓ によって，行列 X の 1 行目から ℓ 行目までからなる $\ell \times n$ 型の行列を表わし，行列 X の m 次行列式の全体のなす集合を $\Gamma(X)$ で表わす。多項式環 $B[X] = B[X_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n]$ の部分代数で，部分行列 X_ℓ の各成分と $\Gamma(X)$ で生成される B-代数を $R_\ell(X)$ とする。従って，$\ell = m$ のときは，代数 $R_m(X)$ は多項式環 $B[X]$ に他ならない。$\ell = 0$ であって B が体のとき，

環 $R_0(X)$ はグラスマン多様体の斉次座標環であって，その環構造は昔からよく知られている。そして，$\ell=1, m=2, n=d$ の場合が上に述べた Rees 代数 $\mathcal{R}(M_2)$ の随伴次数環である。

任意の ℓ について，B-代数 $R_\ell(X)$ は，$\ell = 0$ の場合と同様によい性質を持つことが，ASL（Algebras with Straightening Law）の理論を用いて示される。

定理 11.3 ([GHKN]). (1) 環 $R_\ell(X)$ が Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein) であることと環 B が Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein) であることは同値である。

(2) 環 B が正規整域ならば，環 $R_\ell(X)$ も正規整域であって，その因子類群 $\mathrm{Cl}(R_\ell(X))$ は $\mathrm{Cl}(B)$ と同型である。

また，基礎環 B が無限体の場合には，B-代数 $R_\ell(X)$ は，特殊線型群のある部分群の不変式環として現れる。このことを説明するため，以下 $B=k$ は体と仮定しよう。$\mathrm{SL}_m(k)$ によって k 上の m 次特殊線型群を表わす。$\mathrm{SL}_m(k)$ の次の部分群

$$\mathrm{H}_m^\ell = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{E}_\ell & 0 \\ \hline C & D \end{array} \right) \;\middle|\; C \in \mathrm{Mat}_{(m-\ell)\times\ell}(k), D \in \mathrm{SL}_{m-\ell}(k) \right\}$$

(E_ℓ は ℓ 次の単位行列，$\mathrm{Mat}_{(m-\ell)\times\ell}(k)$ は体 k 内に成分を持つ $(m-\ell)\times\ell$ 型の行列全体の集合を表わす) を考える。群 $\mathrm{SL}_m(k)$ は多項式環 $k[X]$ に自然に作用するが，体 k が無限のときはその不変式環が $k[X]^{\mathrm{SL}_m(k)} = R_0(X)$ であることが，不変式論の第 1 基本定理である (cf. [DP, BV])。論文 [GHKN] では，任意の ℓ について環 $R_\ell(X)$ が上で定義した群 H_m^ℓ の不変式環として現れることが示されている。

定理 11.4 ([GHKN]). k が無限体なら，$R_\ell(X) = k[X]^{\mathrm{H}_m^\ell}$ である。

イデアルに関する諸概念を加群に拡張しこれを解析する作業は，Rees 代数に限らず最近活発に行われている。例えば，イデアルの整閉包を加群に拡張したり，$\mathfrak{m}$-準素イデアルの重複度を拡張した Buchsbaum-Rim 重複度などが，その重要な例である。第 2 節で述べた Brodmann によるイデアルの冪，即ちイデアルの Rees 代数の斉次成分の漸近挙動も，加群の Rees 代数の斉次成分や複数のイデアルの multi-Rees 代数の斉次成分の漸近挙動に，自然に拡張されている。この報告の締めくくりとして纏めておこう。

定理 11.5 ([KMR, KS]). $I_1, I_2, \cdots, I_r$ は Noether 環 A 内のイデアルとする。このとき，集合 $\mathrm{Ass}_A(A/I^{n_1}I^{n_2}\cdots I^{n_r})$ は, 十分大なる自然数の組 $\underline{\mathbf{n}} = (n_1, n_2, \cdots, n_r)$ に対して一定である。

定理 11.6 ([KN]). M を有限生成自由 A-加群 F の部分加群とする。M の Rees 代数と多項式環 $\mathrm{Sym}_A(F)$ の n 次斉次成分を，それぞれ M^n, F^n で表すと，集合 $\mathrm{Ass}_A(F^n/M^n)$ は，十分大なる自然数 n で一定である。

このような一般化は重複度に関しても行われていて，様々な応用がある。Kirby–Rees [KR] は，重複度の理論を非常に一般的な形に拡張することに成功しているので，参照されたい。なお，定理 11.5 と 11.6 は，早坂太君の次の結果が示すように，非常に一般的な形で述べることができる。

定理 11.7 ([Ha]). $A \subseteq B$ は標準的な $\mathbb{N}^r$-次数付き Noether 環の次数付き環拡大で $A_{\mathbf{0}} = B_{\mathbf{0}} = R$ なるものと仮定する。N は有限生成 $\mathbb{N}^r$-次数付き A-加群とし，M を有限生成 $\mathbb{N}^r$-次数付き B-加群とする。このとき，M の次数付き A-部分加群 N に対して，R-加群 $M_{\underline{\mathbf{n}}}/N_{\underline{\mathbf{n}}}$ に随伴する素イデアルの集合 $\mathrm{Ass}_R(M_{\underline{\mathbf{n}}}/N_{\underline{\mathbf{n}}})$ は，十分大なる自然数の組 $\underline{\mathbf{n}} = (n_1, n_2, \cdots, n_r)$ に対して一定である。

定理 11.5 は環拡大 $\mathcal{R}(I_1, I_2, \cdots, I_r) \subseteq A[t_1, t_2, \cdots, t_r]$ を考察することにより，定理 11.6 は加群 M の Rees 代数と多項式環の拡大 $\mathcal{R}(M) \subseteq \mathrm{Sym}_A(F)$ を考えることにより，定理 11.7 に直ちに従う。

参考文献

[Ba] J. Barshay, *Graded algebras of powers of ideals generated by A-sequences*, J. Algebra, **25** (1973), 90–99

[Bo] J.-F. Boutot, *Singularités rationnelles et quotients par les groupes réductifs,* Invent. Math., **88** (1987), 65–68

[Br] M. Brodmann, *Asymptotic stability of* $\mathrm{Ass}(M/I^nM)$, Proc. Amer. Math. Soc., **74** (1979), 16–18

[BH] W. Bruns and J. Herzog, Cohen-Macaulay rings, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **39**, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, ISBN: 0-521-41068-1

[BM] M. Barile and Morales, On certain algebras of reduction number one, J. Algebra, **206** (1998), 113-128

[BST] W. Bruns, A. Simis, and N. V. Trung, *Blow-up of straightening-closed ideals in ordinal Hodge algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **326** (1991), 507–528

[BV] W. Bruns and U. Vetter, Determinantal rings. Lecture Notes in Mathematics, **1327**, Springer-Verlag, Berlin, 1988,ISBN: 3-540-19468-1

[CB] A. Conca and W. Bruns, *F-rationality of determinantal rings and their Rees rings*, Michigan Math. J., **45** (1998), 291–299

[CHV] A. Corso, C. Huneke, and W. V. Vasconcelos, *On the integral closure of ideals*, Manuscripta Math., **95** (1998), 331-347.

[CP] A. Corso and C. Polini, *Links of prime ideals and their Rees algebras,* J. Algebra, **178** (1995), 224-238.

[CPV] A. Corso, C. Polini, and W. V. Vasconcelos, *Links of prime ideals,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **115** (1994), 431-436.

[Cow] R. Cowsik, *Symbolic powers and the number of defining equations,* Algebra and its Applications, Lect. Notes in Pure and Appl. Math., **91** (1985), 13–14

[Cut] S. D. Cutkosky, *Symbolic algebras of monomial primes,* J. Reine Angew. Math., **416** (1991), 71–89

[DP] C. De Concini and D. Procesi, *A characteristic free approach to invariant theory,* Adv. in Math., **21** (1976), 330–354.

[EHU] D. Eisenbud, C. Huneke, and B. Ulrich, *What is the Rees algebra of a module?* Proc. Amer. Math. Soc., **131** (2003), 701–708

[F] G. Faltings, *Der Endlichkeitssatz in der lokalen Kohomologie*, Math. Ann., **255** (1981), 45–56

[Ga] T. Gaffney, *The theory of integral closure of ideals and modules: applications and new developments with an appendix by Steven Kleiman and Anders Thorup*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **21**, New developments in singularity theory (Cambridge, 2000), 379–404, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001

[GaK] T. Gaffney and S. L. Kleiman, *Specialization of integral dependence for modules,* Invent. Math., **137** (1999), 541–574

[G1] S. Goto, *On Buchsbaum rings,* J. Algebra, **67** (1980), 272–279

[G2] S. Goto, *Buchsbaum rings with multiplicity 2*, J. Alg., **74** (1982), 494–508

[G3] S. Goto, *Integral closedness of complete-intersection ideals*, J. Algebra, **108** (1987), 151–160

[G4] S. Goto, *Buchsbaumness in Rees algebras associated to ideals of minimal multiplicity*, J. Algebra, **213** (1999), 604–661

[G5] S. Goto, *On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings,* J. Algebra, **85** (1983), 490–534

[Gh] L. Ghezzi, *On the depth of the associated graded rings of an ideal*, J. Algebra, **248** (2002), 688–707

[GHKN] S. Goto, F. Hayasaka, K. Kurano, and Y. Nakamura, *Rees algebras of the second syzygy module of the residue field of a regular local ring*, Commutative algebra and algebraic geometry, 97–108, Contemp. Math., **390**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005

[GI1] S. Goto and S.-i. Iai, Embeddings of certain graded rings into their canonical modules, J. Algebra, **228** (2000), 377-396

[GI2] S. Goto and S. Iai, *Gorenstein graded rings associated to ideals*, J. Algebra, **294** (2005), 373–407

[GM] S. Goto and N. Matsuoka, *Buchsbaumness in Rees algebras of* $\mathfrak{m}$*-primary ideals in two-dimensional regular local rings*, in preparation

[GMT] S. Goto, N. Matsuoka, and R. Takahashi, *On quasi-socle ideals of Gorenstein local rings*, preprint (2006)

[GNa] S. Goto and Y. Nakamura, On the Gorensteinness in graded rings associated to ideals of analytic deviation one, Contemp. Math., **159** (1994), 51-72

[GN1] S. Goto and K. Nishida, *The Cohen-Macaulay and Gorenstein Rees algebras associated to filtrations*, Mem. Amer. Math. Soc., **110** (1994), American Mathematical Society, Providence, RI, 1994. pp. i–viii and 1–134

[GN2] S. Goto and K. Nishida, *Hilbert coefficients and Buchsbaumness of associated graded rings*, J. Pure Appl. Algebra, **181** (2003), 61–74

[GNN1] S. Goto, Y. Nakamura, and K. Nishida, *Cohen-Macaulay graded rings associated to ideals,* Amer. J. Math., **118** (1996), 1197–1213

[GNN2] S. Goto, Y. Nakamura, and K. Nishida, *Cohen-Macaulayness of graded rings associated to ideals,* J. Math. Kyoto Univ., **36**, (1996), 229-250

[GNW] S. Goto, K. Nishida, and K. Watanabe, *Non-Cohen-Macaulay symbolic blow-ups for space monomial curves and counterexamples to Cowsik's question*, Proc. Amer. Math. Soc., **120** (1994), 383–392

[GSa1] S. Goto and H. Sakurai, *The equality $I^2 = QI$ in Buchsbaum rings*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **110** (2003), 25–56

[GSa2] S. Goto and H. Sakurai, *The reduction exponent of socle ideals associated to parameter ideals in a Buchsbaum local ring of multiplicity two*, J. Math. Soc. Japan, **56** (2004), 1157–1168

[GSa3] S. Goto and H. Sakurai, *When does the equality $I^2 = QI$ hold true in Buchsbaum rings?*, Commutative algebra, 115–139, Lect. Notes Pure Appl. Math., **244**, 2006

[GSa4] S. Goto and H. Sakurai, *Index of reducibility of parameter ideals for modules possessing finite local cohomology modules*, preprint (2006)

[GSa5] S. Goto and H. Sakurai, *Buchsbaumness of Rees algebras and associated graded rings with respect to socle ideals of subsystems of parameters in Buchsbaum local rings*, in preparation

[GS1] S. Goto and Y. Shimoda, *On Rees algebras over Buchsbaum rings*, J. Math. Kyoto Univ., **20** (1980), 691–708

[GS2] S. Goto and Y. Shimoda, *On the Rees algebras of Cohen-Macaulay local rings*, Commutative algebra (Fairfax, Va., 1979), 201–231, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 68, Dekker, New York, 1982

[GSu] S. Goto and N. Suzuki, *Index of reducibility of parameter ideals in a local ring*, J. Alg., **87** (1984), 53-88

[GW] S. Goto and K.-i. Watanabe, *On graded rings*, **I**, J. Math. Soc. Japan, **30** (1978), 179–213

[Ha] F. Hayasaka, *Asymptotic stability of primes associated to homogeneous components of multigraded modules*, to appear in J. Algebra

[H] C. Huneke, Tight closure and its applications, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **88**, 1996, ISBN: 0-8218-0412-X

[HE] M. Hochster and J. A. Eagon, *Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfection of determinantal loci*, Amer. J. Math., **93** (1971), 1020–1058

[HH1] S. Huckaba and C. Huneke, *Powers of ideals having small analytic deviation*, Amer. J. Math., **114** (1992), 367–403

[HH2] S. Huckaba and C. Huneke, *Rees algebras of ideals having small analytic deviation*, Trans. Amer. Math. Soc., **339** (1993), 367–403

[HR] M. Hochster and J. L. Roberts, *Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay*, Advances in Math., **13** (1974), 115–175

[HWY1] N. Hara, K.-i. Watanabe, and K.-i. Yoshida, *F-rationality of Rees algebras*, J. Algebra, **247** (2002), 153–190

[HWY2] N. Hara, K.-i. Watanabe, and K.-i. Yoshida, *Rees algebras of F-regular type*, J. Algebra, **247** (2002), 191–218

[I] S. Ikeda, *On the Gorensteinness of Rees algebras over local rings*, Nagoya Math. J., **102** (1986), 135–154

[K1] T. Kawasaki, *On arithmetic Macaulayfication of Noetherian rings*, Trans. Amer. Math. Soc., **354** (2002), 123–149

[K2] T. Kawasaki, *Finiteness of Cousin cohomologies*, Preprint (2006).

[Kl] S. Kleiman, *Equisingularity, multiplicity, and dependence,* Commutative algebra and algebraic geometry (Ferrara), 211–225, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **206**, Dekker, New York, 1999

[KMR] D. Katz, S. McAdam and L. J. Ratliff Jr, *Prime divisors and divisorial ideals*, J. Pure Appl. Alg., **59** (1989), 179–186

[KN] D. Katz and C. Naudé, *Prime ideals associated to symmetric powers of a module*, Comm. Alg., **23** (1995), no. 12, 4549–4555

[KR] D. Kirby and D. Rees, *Multiplicities in graded rings : The general theory*, Contemporary Math., **159** (1994), 209–267

[KS] A. K. Kingsbury and R. Y. Sharp, *Asymptotic behavior of certain sets of prime ideals*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 1703–1711

[L] J. Lipman, *Cohen-Macaulayness in graded algebras*, Math. Res. Lett., **1** (1994), 149–157

[MG] M. Morimoto and S. Goto, *Non-Cohen-Macaulay symbolic blow-ups for space monomial curves,* Proc. Amer. Math. Soc., **116** (1992), 305–311

[N] M. Nagata, Lectures on the fourteenth problem of Hilbert, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1965

[Ni] K. Nishida, *On the depth of the associated graded ring of a filtration,* J. Algebra, **285** (2005), 182–195

[PU] C. Polini and B. Ulrich, *Necessary and sufficient conditions for the Cohen-Macaulayness of blowup algebras,* Compositio Math., **119** (1999), 185–207

[R] D. Rees, *Two classical theorems of ideal theory. Proc*, Cambridge Philos. Soc., **52** (1956), 155–157

[Re] I. Reiten, *The converse to a theorem of Sharp on Gorenstein modules*, Proc. Amer. Math. Soc., **32** (1972), 417–420

[R1] P. Roberts, *A prime ideal in a polynomial ring whose symbolic blow-up is not Noetherian,* Proc. Amer. Math. Soc., **94** (1985), 589–592.

[R2] P. Roberts, *An infinitely generated symbolic blow-ups in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem,* J. Algebra, **132** (1990), 461–473.

[S] Y. Shimoda, *A note on Rees algebras of two-dimensional local domains*, J. Math. Kyoto Univ., **19** (1979), 327–333

[SSU] A. Simis, K. Smith, B. Ulrich,*An algebraic proof of Zak's inequality for the dimension of the Gauss image,* Math. Z., **241** (2002), 871–881

[SUV] A. Simis, B. Ulrich, and W. V. Vasconcelos, *Rees algebras of modules,* Proc. London Math. Soc., (3) **87** (2003), 610–646

[SV] J. Stückrad and W. Vogel, Buchsbaum rings and applications, An interaction between algebra, geometry and topology, Springer-Verlag, Berlin, 1986, ISBN: 3-540-16844-3

[SY] Y. Shimoda and K. Yamagishi, *On the Buchsbaum associated graded modules with respect to* $\mathfrak{m}$*-primary ideals whose reduction numbers are at most one*, J. Algebra, **234** (2000),169–186

[TI] N. V. Trung and S. Ikeda, *When is the Rees algebra Cohen-Macaulay?*, Comm. Algebra, **17** (1989), 2893–2922

[V] G. Valla, *Certain graded algebras are always Cohen-Macaulay*, J. Algebra, **42** (1976), 537–548

[W] J. Watanabe, $\mathfrak{m}$*-full ideals*, Nagoya Math. J., **106** (1987), 101–111

[Y1] K. Yamagishi, *The associated graded modules of Buchsbaum modules with respect to*$\mathfrak{m}$*-primary ideals in the equi-*I*-invariant case*, J. Algebra, **225** (2000), 1–27

[Y2] K. Yamagishi, *Buchsbaumness in Rees modules associated to ideals of minimal multiplicity in the equi-*$\mathbb{I}$*-invariant case*, J. Algebra, **251** (2002), 213–255