第 50 回代数学シンポジウム・徳島大学，2005 年 8 月 2 日

GL_n の大域・局所 Langlands 対応

吉田 輝義[1]
(京都大学大学院理学研究科 / Harvard University)

1 はじめに

本稿では初等整数論の問題（整係数 2 次形式による素数の表示）から始めて，円分体・類体論および Langlands 対応までの簡単な紹介を試みる．まず，よく知られた次の定理を思い出そう：

命題 1. p を奇素数とするとき：

$$\exists x, y \in \mathbb{Z},\ p = x^2 + y^2 \iff p \equiv 1 \pmod 4.$$

$\Longrightarrow$ は mod 4 で考えれば易しい．$\Longleftarrow$ の証明には，まず平方剰余の相互法則の第一補充則：

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = 1 \iff p \equiv 1 \pmod 4.$$

を思い出す．-1 が mod p の平方剰余ならば, ある整数 x に対して $p \mid x^2+1 = (x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})$ だが $p \nmid x+\sqrt{-1},\ x-\sqrt{-1}$ だから，p は $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ の素元でない．よって $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ が UFD であることを用いれば $p = (x+\sqrt{-1}y)(x-\sqrt{-1}y)$ を得る．次に，以下の命題を考える．

命題 2. p を 2,5 と異なる素数とするとき：

$$\exists x, y \in \mathbb{Z},\ p = x^2 + 5y^2 \iff p \equiv 1, 9 \pmod{20}.$$

前と同様に，平方剰余の相互法則を用いて

$$\left(\frac{-5}{p}\right) = 1 \iff p \equiv 1, 3, 7, 9 \pmod{20}.$$

と計算できるが，$p \equiv 3, 7 \pmod{20}$ なる素数 p が $x^2 + 5y^2$ の形に表せないことは mod5 で考えれば明らかである．逆に $p \equiv 1, 9 \pmod{20}$ なる素数 p が $x^2 + 5y^2$ の形に表せることを証明するには，もう少し高度な事実を用いる．もちろん，前の命題と同じ議論ができないのは，$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ が UFD ではなく（従って PID ではなく），類数 2 を持つ（イデアル類群が $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）であることに由来する．つまり，どの素数が $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ において 2 つの**単項**イデアルの積に分解しているかを判定しなければならない．これには，代数体の **Hilbert 類体**を用いる．代数体 F の Hilbert 類体 L とは，L においてはちょうど F の単項イデアルだけが完全に分解するという性質で特徴付けられる F の Abel 拡大であり，Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/F)$ は標準的にイデアル類群と同形になる．この場合，2 次体 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ の Hilbert 類体はその 2 次拡大 $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-5}, \sqrt{-1})$ となり，上の命

[1] E-mail: `yoshida@math.harvard.edu` (English), `teruyoshi@gmail.com`

題は，この L において完全分解する素数を求める問題に帰着される．これが $\mathrm{mod}\,20$ で決まる答えをもつのは，この L が**円分体** $\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_{20})$ に含まれることによる．そのためにまず円分体の $\mathbb{Q}$ 上の Galois 群の決定および素数の分解法則を復習する．これは類体論の最も基本的な場合にあたる．

F を体とする．F の標数で割れない自然数 $N \geq 1$ に対し，$X^N - 1$ の F 上の分解体を $F(\boldsymbol{\mu}_N)$ で表す（F 上の**円分体**）．$F(\boldsymbol{\mu}_N)$ の中で $X^N - 1$ の N 個の根は乗法群 $\boldsymbol{\mu}_N$ をなし，これは体の乗法群の有限部分群だから巡回群である．よってその生成元（**1 の原始 N 乗根**）ζ_N をひとつ選べば，$F(\boldsymbol{\mu}_N)$ は F 上 ζ_N で生成される単拡大である．従って $\mathrm{Gal}(F(\boldsymbol{\mu}_N)/F)$ の元 σ は ζ_N の像 $\sigma(\zeta_N)$ によって一意に定まり，この像はまた原始 N 乗根であるから，ある $a \bmod N \in (\mathbb{Z}/N)^\times$ によって ζ_N^a と表せる．この $a \bmod N$ は ζ_N の選び方に依らないから，標準的な単射群準同形

$$\mathrm{Gal}(F(\boldsymbol{\mu}_N)/F) \ni (\zeta_N \mapsto \zeta_N^a) \longmapsto a \bmod N \in (\mathbb{Z}/N)^\times \tag{1}$$

が定まり，とくに $F(\boldsymbol{\mu}_N)/F$ は Abel 拡大である．一般には，この準同形は全射ではない．

定理 3.（**円分多項式の既約性**）$F = \mathbb{Q}$ のとき，任意の $N \geq 1$ に対し，(1) は群同形である．

この定理の証明（の一つ）は Frobenius 置換を用いるものであり，素数の分解法則を同時に与える．これを簡単に復習しよう．K を $\mathbb{Q}$ の有限次 Galois 拡大とする．K での $\mathbb{Z}$ の整閉包 $\mathcal{O}_K$（K の**整数環**）は Dedekind 整域である．$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の任意の元は $\mathcal{O}_K$ の自己同形を引き起こす．$\mathcal{O}_K$ の 0 でない素イデアル P を固定する．このとき，$\sigma(P) = P$ なる $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ のなす部分群 G_P を P の**分解群**という．ある素数 p に対し $P \cap \mathbb{Z} = (p)$ となり，G_P の元は剰余体 $k_P = \mathcal{O}_K/P$ の $\mathbb{F}_p$ 上の自己同形を引き起こす．この準同形

$$G_P \ni \sigma \longmapsto \sigma \bmod P \in \mathrm{Gal}(k_P/\mathbb{F}_p) \tag{2}$$

が全射であることは基本的な補題である．これが同形であるとき p は K で**不分岐**であるといい，このとき有限体の Galois 群 $\mathrm{Gal}(k_P/\mathbb{F}_p)$ の生成元 $x \mapsto x^p$（Frobenius 写像）に写るような G_P の元 Fr_P（P の **Frobenius 置換**）が一意に定まる．$P' \cap \mathbb{Z} = (p)$ なる別の素イデアル P' を取ると，$\mathrm{Fr}_{P'}$ と Fr_P（および $G_{P'}$ と G_P）は $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の中で共役であるから，とくに $K/\mathbb{Q}$ が Abel 拡大ならば Fr_P と G_P は p のみで定まり，これを G_p, Fr_p で表す．Fr_p は G_p の生成元であり，p が $\mathcal{O}_K$ で**完全分解**する（$[K:\mathbb{Q}]$ 個の相異なる素イデアルの積に分解する）ことは，$G_p = \{\mathrm{id}\}$，つまり $\mathrm{Fr}_p = \mathrm{id}$ であることと同値である．$\mathbb{Q}$ の Abel 拡大の列 $K \subset K'$ があって p が K' で不分岐ならば，$\mathrm{Fr}_p \in \mathrm{Gal}(K'/\mathbb{Q})$ を K に制限すると $\mathrm{Fr}_p \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を得ることは定義から直ちに従う．さて，上の定理に戻ると，定理は次の命題から従う：

命題 4.（**円分体での素数の分解法則**）素数 p は N を割らなければ $\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_N)$ で不分岐で，$\mathrm{Fr}_p \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_N)/\mathbb{Q})$ は $\zeta_N \mapsto \zeta_N^p$ で与えられる．

これを見るには，まず p の上にある任意の $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_N)}$ の素イデアル P に対して，$\zeta_N^i - \zeta_N^j \in P \iff \zeta_N^i = \zeta_N^j$ に注意する（これは，$\displaystyle\prod_{i=1}^{N}(1-\zeta_N^i) = \frac{X^N-1}{X-1}\Big|_{X=1} = N \notin P$ から従う）．これによって (2) が単射であり，また Frobenius 置換は $\zeta_N \mapsto \zeta_N^p$ でなくてはならないことが分かる．後は，$(\mathbb{Z}/N)^\times$ が $p \bmod N$（p は N を割らない）たちで生成されることに注意すれば，定理 3 を得る．

さて，定理 3 を $N = 20$ に適用し，命題 2 に戻ろう．私たちが考えている中間体に対応する $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_{20})/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/20)^\times$ の部分群は次のようになる：

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Q} & \subset & \mathbb{Q}(\sqrt{-5}) & \subset & \mathbb{Q}(\sqrt{-5},\sqrt{-1}) & \subset & \mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_{20}) \\ | & & | & & | & & | \\ (\mathbb{Z}/20)^\times & \supset & \{1,3,7,9\} & \supset & \{1,9\} & \supset & \{1\} \end{array}$$

素数 $p \neq 2,5$ はこれらの体において不分岐であり，p が $\mathbb{Q}(\sqrt{-5},\sqrt{-1})$ の整数環で完全分解するためには，$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{-5},\sqrt{-1})/\mathbb{Q})$ において $\mathrm{Fr}_p = \mathrm{id}$，つまり $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_{20})/\mathbb{Q})$ において $\mathrm{Fr}_p \in \{1,9\}$ が必要十分だから，命題 4 によって命題 2 を得る．

以上を踏まえて，次の問題を考える：

問題 5. p を 23 と異なる素数とするとき：

$$\exists x,y \in \mathbb{Z},\ p = x^2 + 23y^2 \iff \text{「???」}$$

ここで 23 が選ばれた理由は次のとおりである．$\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ の類数は 3 であり，その Hilbert 類体 L は $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong S_3$（3 次の対称群）となるような $\mathbb{Q}$ の非可換 Galois 拡大である．従って，L はどんな円分体にも含まれない．円分体に含まれない代数体における分解法則を合同式によって記述することはできないので，**問題 5 の答えを p に関する合同式で表すことはできない**．

しかし，この問題の答えは次のような形でともかくも存在する．上半平面上のある合同部分群に関する重さ 1 の保型形式 f が存在して，この問題の「???」の部分に入るのは**「f の p 番目の Fourier 係数 $a_p(f)$ が 2」**である．つまり，この f（この場合はある種のテータ級数）が，非可換 Galois 拡大 $L/\mathbb{Q}$ における素数の分解法則を表している．もう少しだけ詳しく言うと，$\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}}$ の任意の 2 次元表現（**Galois 表現**）に対して，$\mathbb{Q}$ 上の GL_2 のある種の保型表現が対応することが予想されており（後述の **Langlands 対応**），この場合の拡大 $L/\mathbb{Q}$ および S_3 の（唯一の）既約 2 次元表現からできる Galois 表現

$$R : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong S_3 \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$$

に対しては，$SL_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群 $\Gamma_1(23)$ に関する重さ 1 の保型形式 f が対応することが知られている．この対応は，レベルを割らないような全ての素数 p に対して

$$\mathrm{tr}(R(\mathrm{Fr}_p)) = a_p(f)$$

という等号で特徴付けられている（この場合は非可換なので Fr_p は共役類であるが，トレースは共役類のみで定まるからよい）から，$\mathrm{Fr}_p = \mathrm{id} \iff a_p(f) = 2$ ということになる（[Fu2] 参照）．

このように，ごく初等的な整数論の問題がすでに，非可換類体論（Langlands 対応）への扉を開いてくれる．本稿では，Langlands 対応の statement と，最近筆者が R. Taylor と得た結果（ある種の大域 Langlands 対応の局所 Langlands 対応との整合性）の紹介を目標とする．いわゆる類体論・Langlands 対応には，有限体上の関数体や $\mathbb{C}$ 上の関数体に対しても平行した理論が知られているが，本稿では代数体・標数 0 の局所体に限定して話を進める．

2　円分体（$\mathbb{Q}$ 上・$\mathbb{Q}_p$ 上）

上で紹介した円分体の理論は，類体論およびその代数幾何学的実現である虚数乗法論の両方に対して完全な形の雛形を提供している．次節以降これらの理論を述べるために，上の定理 3 および命題 4 を再定式化し，また p 進体上の円分体についても述べる．

完全体 F に対し，F の代数閉包を $\overline{F}$ とし，F の**絶対 Galois 群** $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ を G_F で表す．$\overline{F}$ の中での F の**最大 Abel 拡大体**を F^{ab} で表すと，その Galois 群は $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F) = G_F^{\mathrm{ab}}$ となる．F の標数で割れない整数 $N \geq 1$ に対して，$X^N - 1$ の F 上の分解体を $F(\boldsymbol{\mu}_N)$ で表す．F の**最大円分拡大体**を $F^{\mathrm{cyc}} := \bigcup_{\mathrm{char}\,F \nmid N} F(\boldsymbol{\mu}_N)$ で定め，その Galois 群を $G_F^{\mathrm{cyc}} := \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{cyc}}/F)$ とする．前節で見たように $F^{\mathrm{cyc}} \subset F^{\mathrm{ab}}$ であるから，次の全射が定まる：

$$G_F^{\mathrm{ab}} \longrightarrow G_F^{\mathrm{cyc}} \tag{3}$$

また，$M \mid N$ ならば $\boldsymbol{\mu}_M \subset \boldsymbol{\mu}_N$ より $F(\boldsymbol{\mu}_M) \subset F(\boldsymbol{\mu}_N)$ である．このとき前節の単射 (1) は，制限 $\mathrm{Gal}(F(\boldsymbol{\mu}_N)/F) \longrightarrow \mathrm{Gal}(F(\boldsymbol{\mu}_M)/F)$ および自然な射影 $(\mathbb{Z}/N)^\times \to (\mathbb{Z}/M)^\times$ と整合的であるから，N を動かして射影的極限を取ると，次の単射が定まる：

$$G_F^{\mathrm{cyc}} \ni (\zeta_N \mapsto \zeta_N^{a_N})_N \longmapsto (a_N)_N \in \varprojlim_{\mathrm{char}\,F \nmid N} (\mathbb{Z}/N)^\times \quad (\zeta_N \in \boldsymbol{\mu}_N,\ a_N \in (\mathbb{Z}/N)^\times) \tag{4}$$

とくに，$\mathrm{char}\,F = 0$ ならば，すべての $\mathbb{Z}/N$ の射影的極限を $\widehat{\mathbb{Z}} := \varprojlim_N \mathbb{Z}/N$（$\mathbb{Z}$ の**副有限完備化**）とおくと，単射 $G_F^{\mathrm{cyc}} \to \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ を得る．

例 6. F を q 個の元を持つ有限体 $\mathbb{F}_q$（q は素数 $p = \mathrm{char}\,F$ のべき）とすると，有限体の有限次拡大は有限体であり，有限体の 0 でない元は全て 1 のべき根である ($\mathbb{F}_{q^n} = \mathbb{F}_q(\boldsymbol{\mu}_{q^n-1})$) から，$F^{\mathrm{cyc}} = F^{\mathrm{ab}} = \overline{F}$．また $G_F = G_F^{\mathrm{ab}} = G_F^{\mathrm{cyc}} \cong \widehat{\mathbb{Z}}$ で，この同形は，例えば Frobenius 写像 $x \mapsto x^q$ を 1 に写すことで得られる．これに (4) を合成した単射 $\widehat{\mathbb{Z}} \to \varprojlim_{p \nmid N} (\mathbb{Z}/N)^\times$ は 2.3 節で現れる．

2.1　有理数体上の円分体

有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の最大円分拡大に関しては以下の定理が基本的である：

定理 7. $F = \mathbb{Q}$ とするとき，次が成り立つ：

(A)　（**円分多項式の既約性**） (4) は同形である：$G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{cyc}} \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathbb{Z}}^\times$.

(B)　（**Kronecker-Weber**） (3) は同形である：$G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\cong} G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{cyc}}$，すなわち $\mathbb{Q}^{\mathrm{cyc}} = \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$.

(A) の部分は，N に関して定理 3 の射影的極限を取っただけである．(B) の部分の証明はここでは扱わないが，分岐理論を用いるか，または一般の大域類体論の系として示される．

それでは，命題 4（素数の分解法則）はどのように表せるのであろうか．素数 p に対する Fr_p は，p が不分岐な円分体 $\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}^{p\text{-ur}} := \bigcup_{p\nmid N} \mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_N)$ の Galois 群 $\varprojlim_{p\nmid N}(\mathbb{Z}/N)^\times$ において意味をもつ．これに関連して，$\mathbb{Z}$ の副有限完備化が，中国剰余定理によって次のように分解されることに注意する：

$$\widehat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cong} \prod_p \mathbb{Z}_p, \quad \mathbb{Z}_p := \varprojlim_m \mathbb{Z}/p^m.$$

この分解は $G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} \cong G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{cyc}} \cong \widehat{\mathbb{Z}}^\times \cong \prod_p \mathbb{Z}_p^\times$ という分解を導く．これを用いると，固定した素数 p が不分岐な円分体と分岐する円分体に分けて，

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}^{p\text{-ur}} := \bigcup_{p\nmid N} \mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_N) \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}^{p\text{-ur}}/\mathbb{Q}) \cong \varprojlim_{p\nmid N}(\mathbb{Z}/N)^\times \cong \prod_{\ell\neq p} \mathbb{Z}_\ell^\times \\
\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}^{p\text{-ram}} := \bigcup_m \mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_{p^m}) \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}^{p\text{-ram}}/\mathbb{Q}) \cong \varprojlim_m (\mathbb{Z}/p^m)^\times \cong \mathbb{Z}_p^\times
\end{aligned}$$

と書ける．従って命題 4 は次のように書き直される：

命題 8. 各素数 p に対し，$\mathrm{Fr}_p \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}^{p\text{-ur}}/\mathbb{Q})$ は上の同形によって $(p, p, \ldots) \in \prod_{\ell\neq p} \mathbb{Z}_\ell^\times$ に写る．

定理 7 と命題 8 が $\mathbb{Q}$ に対する類体論の本質的な内容であるが，次に p 進体を導入することで多少整理された定式化を行う．

2.2 p 進体上の円分体

素数 p に対し，p **進体** は $\mathbb{Q}_p := \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ で定義される（この環は体になる）．自然な射により $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Q}_p$ の部分体となるので，埋め込み $\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_N) \to \mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_N)$ を考えることができ，これによって $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_N)/\mathbb{Q}_p)$ を $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_N)/\mathbb{Q})$ の部分群と同一視できる[2]．N を動かして極限を取ることにより，体の単射 $\mathbb{Q}^{\mathrm{cyc}} \to \mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}}$ と Abel 群の単射 $G_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{cyc}} \to G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{cyc}}$ が定まる．

$\mathbb{Q}_p$ 上の円分体の Galois 群 $G_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{cyc}}$ はどのような群になるだろうか．この場合も，p が不分岐な部分と分岐する部分に分けて Galois 群を計算しよう：

$$\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}} = \mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}} \cdot \mathbb{Q}_p^{\mathrm{ram}}, \quad \mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}} := \bigcup_{p\nmid N} \mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_N), \quad \mathbb{Q}_p^{\mathrm{ram}} := \bigcup_m \mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^m}).$$

(i) 不分岐拡大 $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}/\mathbb{Q}_p$．この部分については，第 1 節で行った $\mathbb{Q}$ 上の考察（命題 4 の証明）と全く同様にして，不分岐であることが示される．すなわち各 $f \geq 1$ に対して：

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^f-1})/\mathbb{Q}_p) \ni \sigma \longmapsto \sigma \bmod P \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^f}/\mathbb{F}_p)$$

[2] この埋め込みを選ぶことは p の上にある $\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_N)$ の整数環の素イデアルを選ぶことと同値であり，対応する $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_N)/\mathbb{Q})$ の部分群はこの素イデアルの分解群となるが，$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_N)/\mathbb{Q})$ は Abel 群なのでこれは埋め込みの選び方に依らない．埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定しておけば，単射 $G_{\mathbb{Q}_p} \to G_{\mathbb{Q}}$ も固定される．

は同形となる（P は $\mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^f-1})$ の整数環の極大イデアル．$\mathbb{F}_{p^f}=\mathbb{F}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^f-1})$ に注意せよ），この f を動かして極限を取ることにより，次の同形を得る：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}/\mathbb{Q}_p) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) & \xrightarrow{\cong} & \widehat{\mathbb{Z}} \\ (\zeta\mapsto\zeta^a) & \longmapsto & (\zeta\mapsto\zeta^a) & & & (\zeta\in\boldsymbol{\mu}_N,\ p\nmid N) \\ \mathrm{Frob}_p^{-1} & \stackrel{\mathrm{Def.}}{\longmapsto} & (\zeta\mapsto\zeta^p) & \longmapsto & -1 \end{array}$$

（生成元としては，**幾何的 Frobenius 置換** Frob_p，すなわち $\mathrm{mod}\,p$ すると Frobenius 写像 $x\mapsto x^p$ の逆写像となるものをとり，同形 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}/\mathbb{Q}_p)\cong\widehat{\mathbb{Z}}$ は Frob_p を 1 に写すように定める.）

(ii) 分岐拡大 $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ram}}/\mathbb{Q}_p$．この部分については，第 1 節で行った計算の変種：

$$\prod_{i\in(\mathbb{Z}/p^m)^\times}(1-\zeta_{p^m}^i)=\left.\frac{X^{p^m}-1}{X^{p^{m-1}}-1}\right|_{X=1}=p$$

を用いる．$\mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^m})$ の整数環において $\{1-\zeta_{p^m}^i\}_{i\in(\mathbb{Z}/p^m)^\times}$ は互いに同伴（単元倍）であるから，素イデアルとしては $(p)=(1-\zeta_{p^m})^{p^{m-1}(p-1)}$ となる．よって $[\mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^m}):\mathbb{Q}_p]\geq p^{m-1}(p-1)=|(\mathbb{Z}/p^m)^\times|$ だから，この場合の単射 (1)：$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^m})/\mathbb{Q}_p)\to(\mathbb{Z}/p^m)^\times$ は同形である（完全分岐な円分多項式の既約性）．m を動かして極限を取ることにより，次の同形を得る：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ram}}/\mathbb{Q}_p) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}_p^\times \\ (\zeta\mapsto\zeta^{a \bmod p^m}) & \longmapsto & a & \quad (\zeta\in\boldsymbol{\mu}_{p^m}) \end{array}$$

$\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}\cap\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ram}}$ は $\mathbb{Q}_p$ の不分岐かつ完全分岐な拡大だから $\mathbb{Q}_p$ に等しいので，$G_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{cyc}}\cong\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ram}}/\mathbb{Q}_p)\times\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}/\mathbb{Q}_p)$ である．以上により，次の定理の (A) を得る：

定理 9. $F=\mathbb{Q}_p$ とするとき，次が成り立つ：

(A) （**局所円分体の Galois 群**） (4) は次の同形を導く：$G_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{cyc}}\xrightarrow{\cong}\mathbb{Z}_p^\times\times\widehat{\mathbb{Z}}$.

(B) （**局所 Kronecker-Weber**） (3) は同形である：$G_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ab}}\xrightarrow{\cong}G_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{cyc}}$，すなわち $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}}=\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ab}}$.

ここでも，(B) の証明には触れない．この $G_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{cyc}}$ の計算結果 $\mathbb{Z}_p^\times\times\widehat{\mathbb{Z}}$ は，p 進体の乗法群の構造 $\mathbb{Q}_p^\times\cong\mathbb{Z}_p^\times\times\mathbb{Z}$（この同形は，$\mathbb{Q}_p^\times$ の元が一意に $a\cdot p^b$ $(a\in\mathbb{Z}_p^\times,\ b\in\mathbb{Z})$ と表せることを述べている）を連想させずにはおかない．つまり，$G_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ は $\mathbb{Q}_p^\times$ に同形な群を稠密な部分群として含んでおり，これが偶然だとは思い難いだろう．そこで次の定義をする：

定義 10. 同形 $\mathbb{Q}_p^\times\ni a\cdot p^b\longmapsto(a,b)\in\mathbb{Z}_p^\times\times\mathbb{Z}$ と，定理 9(A) の同形の逆写像の合成として $\mathbb{Q}_p$ の **Artin 写像**を定義する．すなわち：

$$\begin{aligned} \mathrm{Art}_{\mathbb{Q}_p}:\mathbb{Q}_p^\times &\longrightarrow G_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{cyc}} \\ a\cdot p^{-b} &\longmapsto \begin{cases} (\zeta\mapsto\zeta^{a \bmod p^m}) & (\zeta\in\boldsymbol{\mu}_{p^m}) \\ (\zeta\mapsto\zeta^{p^b})=\mathrm{Frob}_p^{-b} & (\zeta\in\boldsymbol{\mu}_N,\ p\nmid N) \end{cases} \end{aligned}$$

Artin 写像をこのように定める理由は，アデール環と局所類体論によって 2 通りに説明される．

2.3　大域・局所の整合性とアデール

さて，前小節のはじめに述べたように $G^{\mathrm{cyc}}_{\mathbb{Q}_p}$ は $G^{\mathrm{cyc}}_{\mathbb{Q}}$ の部分群とみなせるわけだが，

$$\mathbb{Q}_p^\times \xrightarrow{\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}_p}} G^{\mathrm{cyc}}_{\mathbb{Q}_p} \subset G^{\mathrm{cyc}}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathbb{Z}}^\times \tag{5}$$

によって $\mathbb{Q}_p^\times$ はどのように $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ に埋め込まれているのだろうか？ $G^{\mathrm{cyc}}_{\mathbb{Q}_p}$ と $G^{\mathrm{cyc}}_{\mathbb{Q}}$ はそれぞれ：

$$\begin{aligned} G^{\mathrm{cyc}}_{\mathbb{Q}_p} &\cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ram}}/\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}/\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_p^\times \times \widehat{\mathbb{Z}} \\ G^{\mathrm{cyc}}_{\mathbb{Q}} &\cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}^{p\text{-ram}}/\mathbb{Q}) \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}^{p\text{-ur}}/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell^\times \end{aligned}$$

という分解を持ち[3]，$\mathbb{Q}_p$ 上の Galois 群は各成分に関して $\mathbb{Q}$ 上の Galois 群の部分群になっている：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ram}}/\mathbb{Q}_p) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathbb{Z}_p^\times \arrow[d, equal] & \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}/\mathbb{Q}_p) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cap"'] & \widehat{\mathbb{Z}} \arrow[d, "\cap"'] \\ \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}^{p\text{-ram}}/\mathbb{Q}) \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{Z}_p^\times & \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}^{p\text{-ur}}/\mathbb{Q}) \arrow[r, "\cong"] & \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell^\times \end{tikzcd} \tag{6}$$

つまり，(5) の単射 $\mathbb{Q}_p^\times (\cong \mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Z}) \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ は，$\mathbb{Z}_p^\times$ に制限すると自然な写像 $\mathbb{Z}_p^\times \to \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ になり，また $p^{-1} \in \mathbb{Q}_p$ は Artin 写像で $\mathrm{Frob}_p^{-1} = \mathrm{Fr}_p$ に写るから，命題 8 によって $(p, p, \ldots) \in \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell^\times$ に写る．この写像は，実はアデール環と呼ばれる自然な構成から説明される．

単射 (5)：$\mathbb{Q}_p^\times \to \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ は群準同形であるが，いずれも環の乗法群であるから，自然な環準同形を用いて表せることが期待される．この射は $\mathbb{Z}_p^\times$ の部分に制限すると，単位元を保たない環準同形（直積成分への同形）$\mathbb{Z}_p \to \widehat{\mathbb{Z}}$ から来る．そこで，テンソル積 $\mathbb{A}^\infty := \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$（**有限アデール環**）を考えれば，$\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ から $\mathbb{A}^\infty$ への単位元を保たない環準同形を得るから，$\mathbb{Q}_p^\times \to (\mathbb{A}^\infty)^\times$ が誘導される．この $(\mathbb{A}^\infty)^\times$ に対しては，テンソル積の標準射から乗法群に誘導される射 $\widehat{\mathbb{Z}}^\times \to (\mathbb{A}^\infty)^\times$，$\mathbb{Q}^\times \to (\mathbb{A}^\infty)^\times$ がいずれも単射で，共通部分 $\widehat{\mathbb{Z}}^\times \cap \mathbb{Q}^\times = \{\pm 1\}$ を除けば直積分解を与える（**素因数分解の一意性**）ので，$(\mathbb{A}^\infty)^\times = \widehat{\mathbb{Z}}^\times \times \mathbb{Q}_{>0}^\times$ である．以上をまとめて，

$$\mathbb{Q}_p^\times \longrightarrow (\mathbb{A}^\infty)^\times \longrightarrow (\mathbb{A}^\infty)^\times/\mathbb{Q}_{>0}^\times \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathbb{Z}}^\times \tag{7}$$

という自然な群準同形ができる．以後，分解 $\widehat{\mathbb{Z}} \cong \prod_\ell \mathbb{Z}_\ell$ によって $\mathbb{A}^\infty \subset \prod_\ell \mathbb{Q}_\ell$ とみなし，これを用いて $\mathbb{A}^\infty$ の元を成分で表す．写像 (7) は $\mathbb{Z}_p^\times \to \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ に制限され，$p^{-1} \in \mathbb{Q}_p^\times$ の像は，

$$p^{-1} \longmapsto (1, \ldots, 1, p^{-1}, 1, 1, \ldots) \longmapsto (p, \ldots, p, 1, p, \ldots,)$$

となる（異なる元は添字 p にあたる成分）から，単射 (5) と一致する．

[3] 2 行目が $G^{\mathrm{cyc}}_{\mathbb{Q}}$ の直積分解を与えていることは，それぞれの Galois 群を計算しなくても，$\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}^{p\text{-ur}} \cap \mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}^{p\text{-ram}}$ は p において完全分岐 $(f = g = 1)$ かつ不分岐 $(e = 1)$ な $\mathbb{Q}$ の拡大，すなわち $\mathbb{Q}$ に等しいことから直接分かる．この事実と前小節の完全分岐な円分多項式の既約性を組み合わせると，N に関する帰納法で円分多項式の既約性（定理 3）の少々異なる証明が得られる．ただし $\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}^{p\text{-ur}}$ が p で不分岐であることに命題 4 の一部を使っているが．

以上によって，可換図式：

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}_p^\times \arrow[r, "\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}_p}"] \arrow[d] \arrow[dr, "(7)"] & & G^{\mathrm{cyc}}_{\mathbb{Q}_p} \arrow[d, "\cap"] \\
(\mathbb{A}^\infty)^\times \arrow[r] & \widehat{\mathbb{Z}}^\times & G^{\mathrm{cyc}}_{\mathbb{Q}} \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}
\tag{8}
$$

ができるが，ここで $\widehat{\mathbb{Z}}^\times \cong \prod_p \mathbb{Z}_p^\times$ だったことを思い出すと，(8) の下の行の写像 $(\mathbb{A}^\infty)^\times \to G^{\mathrm{cyc}}_{\mathbb{Q}}$ は，全ての素数 p に対する (8) の可換性を要請すると一意に決まってしまうことが分かる．つまり，アデールの定義を導入すると，定理 7(A) の写像は，全ての素数 p に対して $\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}_p}$ を与えるという性質で特徴づけられることになる．

これを最終的な形にまとめるために，実素点での Artin 写像も定義する．実数体 $\mathbb{R}$ に対しては $\mathbb{C} = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^{\mathrm{ab}} = \mathbb{R}^{\mathrm{cyc}} = \mathbb{R}(\boldsymbol{\mu}_4)$ であり，Artin 写像を：

$$\mathrm{Art}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^{>0} \xrightarrow{\cong} G^{\mathrm{cyc}}_{\mathbb{R}} = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$$

で定め，$\mathbb{Q}_\infty := \mathbb{R}$ と書くことで有限素点（素数 p）と一括して $\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}_v}$ $(v = p, \infty)$ と表す．これらを統合するために**アデール環** $\mathbb{A} := \mathbb{A}^\infty \times \mathbb{R}$（$\mathbb{Q}$ 代数としての直積）を考える．乗法群は $\mathbb{A}^\times = (\mathbb{A}^\infty)^\times \times \mathbb{R}^\times = \widehat{\mathbb{Z}}^\times \mathbb{Q}^\times \mathbb{R}^{>0}$ と直積分解される．この分解から得られる同形 $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}^{>0} \cong \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ は $(\mathbb{A}^\infty)^\times \longrightarrow (\mathbb{A}^\infty)^\times/\mathbb{Q}^\times_{>0} \cong \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ および $\mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^{>0} \cong \{\pm 1\}$ に制限されるから，全ての素点 v に対して次の可換図式を得る：

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}_v^\times \arrow[r, "\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}_v}"] \arrow[d] \arrow[dr, "(7)"] & & G^{\mathrm{cyc}}_{\mathbb{Q}_v} \arrow[d, "\cap"] \\
\mathbb{A}^\times \arrow[r] & \widehat{\mathbb{Z}}^\times & G^{\mathrm{cyc}}_{\mathbb{Q}} \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}
\tag{9}
$$

これによって，定理 7(A) と命題 8 は以下のように再定式化できる：

定理 11. $\mathbb{Q}$ の全ての素点 v に対する $\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}_v} : \mathbb{Q}_v^\times \to G^{\mathrm{cyc}}_{\mathbb{Q}_v} \subset G^{\mathrm{cyc}}_{\mathbb{Q}}$ の積 $\prod_v \mathrm{Art}_{\mathbb{Q}_v} : \mathbb{A}^\times \to G^{\mathrm{cyc}}_{\mathbb{Q}}$ は，$\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}^{>0}$ を核とする全射である．すなわち，次の同形（$\mathbb{Q}$ の **Artin 写像**）を得る：

$$\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}^{>0} \xrightarrow{\cong} G^{\mathrm{cyc}}_{\mathbb{Q}}.$$

ここで，積 $\prod_v \mathrm{Art}_{\mathbb{Q}_v}$ が定義されることは次のように分かる：$G^{\mathrm{cyc}}_{\mathbb{Q}} = \varprojlim_N \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_N)/\mathbb{Q})$ だから，各 $N \geq 1$ に対して $\prod_v \mathrm{Art}_{\mathbb{Q}_v} : \mathbb{A}^\times \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_N)/\mathbb{Q})$ が整合的に定義されればよい．$\mathbb{A}^\times = \mathbb{R}^\times \times (\mathbb{Q} \otimes \prod_p \mathbb{Z}_p)^\times$ の任意の元 x に対して，その p 成分 x_p はほとんど全て（:= 有限個を除いて全て）の素数 p に対して $\mathbb{Z}_p^\times$ に属する．$p \nmid N$ であれば $\mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_N)/\mathbb{Q}_p$ は不分岐で，任意の $x_p \in \mathbb{Z}_p^\times$ に対して $\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}_p}(x_p) = \mathrm{id} \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_N)/\mathbb{Q}_p)$ である．従って $\prod_v \mathrm{Art}_{\mathbb{Q}_v}(x_v) \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_N)/\mathbb{Q})$ は有限積であり，N を動かしたときの整合性は $\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}_v}$ の定義から明らかである．

本質的に本稿で証明を与えた定理 11 に $\mathbb{Q}^{\mathrm{cyc}} = \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$（定理 7(B)）を合わせれば，$\mathbb{Q}$ の大域類体論のアデールによる定式化を得たことになる．この大域・局所の整合性に意味を与えるには，$\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}_p}$ の定義に内在的な理由を与える必要があるが，これは次節の局所類体論で明らかになる．

3 類体論と Langlands 対応

本節からは特に証明を与えず，理論の主結果の紹介にとどめる．まず，$\mathbb{Q}_p$ および $\mathbb{Q}$ 上の最大円分拡大に関する結果を，それらの有限次拡大体（局所体・代数体）の最大 Abel 拡大に一般化した理論である**類体論**を説明する．

局所類体論　K を**局所体**，すなわちある素数 p に対する $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とする．K における $\mathbb{Z}_p$ の整閉包 $\mathcal{O}_K$ は完備離散付値環となり，これを K の**整数環**という．その極大イデアルを $\mathfrak{p}_K$，剰余体を $k := \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K \cong \mathbb{F}_q$ で表す．極大イデアルの生成元を K の**素元**という．$K = \mathbb{Q}_p$ の場合と同様に，K の**最大不分岐拡大体**を $K^{\mathrm{ur}} := \bigcup_{p \nmid N} K(\boldsymbol{\mu}_N)$ で定義すると，その Galois 群は：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ur}}/K) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) & \xrightarrow{\cong} & \widehat{\mathbb{Z}} \\ (\zeta \mapsto \zeta^a) & \longmapsto & (\zeta \mapsto \zeta^a) & & & (\zeta \in \boldsymbol{\mu}_N,\ p \nmid N) \\ \mathrm{Frob}_K^{-1} & \overset{\text{Def.}}{\longmapsto} & (\zeta \mapsto \zeta^q) & \longmapsto & -1 \end{array}$$

となる．ここでも，Frob_K は $\bmod \mathfrak{p}_K$ では Frobenius 写像 $x \mapsto x^q$ の逆写像となるものと定める．

定義 12. K^{ur} を含むような K の代数拡大 E/K に対し，全射 $\mathrm{Gal}(E/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ur}}/K) \cong \widehat{\mathbb{Z}}$ による $\mathbb{Z}$ の逆像を $W(E/K)$ で表し，E/K の **Weil 群**という．$W_K := W(\overline{K}/K)$ を単に K の Weil 群といい，$\mathrm{Ker}(W_K \to \mathbb{Z}) = \mathrm{Ker}(G_K \to \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ur}}/K))$ を K の**惰性群**といって I_K で表す．W_K の最大 Abel 商は $W_K^{\mathrm{ab}} = W(K^{\mathrm{ab}}/K)$ となる．

定理 13.（**局所類体論** [Se], [Iw]）次の二つの性質を持つような群同形 $\mathrm{Art}_K : K^\times \xrightarrow{\cong} W_K^{\mathrm{ab}} \subset G_K^{\mathrm{ab}}$（$K$ の **Artin 写像**）がただ一つ存在する：

(i) K の任意の素元 π に対し，$\mathrm{Art}_K(\pi)|_{K^{\mathrm{ur}}} = \mathrm{Frob}_K$.

(ii) K の任意の Abel 拡大 K'/K と $x \in N_{K'/K}(K'^\times)$ に対し，$\mathrm{Art}_K(x)|_{K'} = \mathrm{id}$.

前節の定義 10 で定めた $\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}_p}$ は，これらの性質をみたすことが証明できるので[4]，この特徴づけは $\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}_p}$ を前節のように定義することの局所的な説明を与えている．上の性質 (ii) の背後には，次のような Artin 写像の関手性がある：

命題 14.（**Artin 写像の関手性**）局所体の有限次拡大 K'/K に対して，次は可換である：

$$\begin{tikzcd} K'^\times \arrow[r, "\mathrm{Art}_{K'}"] \arrow[d, "N_{K'/K}"'] & \mathrm{Gal}(K'^{\mathrm{ab}}/K') \arrow[d, "\mathrm{Res}"] \\ K^\times \arrow[r, "\mathrm{Art}_K"] & \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K) \end{tikzcd}$$

このように Artin 写像は，局所体の有限次拡大に関する関手性に注目することで最も自然な形で内在的に特徴づけられる．これは $\mathbb{Q}_p$ の Artin 写像のみを眺めていても見えてこない．類体論においては，あらゆる有限次拡大に対して同時に構造が与えられることが本質的なようである．

[4]例えば Coleman のノルム作用素を用いればよい ([Iw], [Y3]).

大域類体論　次に，L を**代数体**，すなわち $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体とする．L の各素点 v に対して，その完備化 L_v は局所体または $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ であり，$G_{L_v}^{\mathrm{ab}}$ は G_L^{ab} の部分群とみなせる．$\mathbb{A}_L := \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{Q}} L$ および $L_\infty := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} L$ とし，$L_\infty^{>0}$ を $L_\infty^\times$ の単位元の連結成分（総正な元全体）とする．このとき，定理 11 は自然に次のように一般化される：

定理 15.（**大域類体論** [AT], [We]）L の全ての素点 v に対する $\mathrm{Art}_{L_v} : L_v^\times \longrightarrow G_{L_v}^{\mathrm{ab}} \subset G_L^{\mathrm{ab}}$ の積 $\prod_v \mathrm{Art}_{L_v} : \mathbb{A}_L^\times \longrightarrow G_L^{\mathrm{ab}}$ は，$L^\times L_\infty^{>0}$ の閉包を核とする全射である．すなわち，次の同形（L の **Artin 写像**）を得る：

$$\mathrm{Art}_L : \mathbb{A}_L^\times \big/ \overline{L^\times L_\infty^{>0}} \xrightarrow{\cong} G_L^{\mathrm{ab}}.$$

この Artin 写像 Art_L は，命題 14 によって有限次拡大 L'/L のノルム写像 $\mathbb{A}_{L'}^\times \to \mathbb{A}_L^\times$ に対する関手性を持ち，また定理 13 の性質 (i) によって L の Abel 拡大における L の素イデアルの分解法則を表している．さて，Langlands 対応（**非可換類体論**）は，類体論を次のように捉え：

$$\{\text{ 指標 } K^\times \to \mathbb{C}^\times\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{ 指標 } G_K \to \mathbb{C}^\times\}$$
$$\{\text{ 指標 } \mathbb{A}_L^\times/L^\times \to \mathbb{C}^\times\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{ 指標 } G_L \to \mathbb{C}^\times\}$$

（$\mathbb{C}^\times$ を離散群と考え，有限商を経由する指標のみを考える），これを任意の正整数 n に対して，

$$\{\ GL_n(K) \text{ の既約許容表現 } \} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\ G_K \text{ の } n \text{ 次元表現 } \}$$
$$\{\ GL_n(\mathbb{A}_L) \text{ の保型表現 } \} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\ G_L \text{ の } n \text{ 次元表現 } \}$$

という形に拡張することで，局所体・代数体の非可換拡大を理解しようとするものである（ここで，$\{\ \cdots$の表現 $\}$ とは表現の同形類の集合を指す）．実際はこれらの対応の各項を多少修正する必要があり，これを以下簡単に紹介する．また，任意の簡約代数群 G の表現論と Galois 表現との間の対応が予想されているが，本稿では $G = GL_n$ の場合に限ることとし，また話の流れを見やすくするため既約許容表現・代数的保型表現等の定義は割愛させていただく．

局所 Langlands 対応　K を剰余標数 p の局所体とし，Ω で $\mathbb{C}$ または $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$（$\ell$ は素数）を表す．

定義 16. ([De2] §8, [Ta] §4) $n \geq 1$ を正整数とする．W_K の Ω 上の n 次元 **Weil-Deligne 表現**とは，Ω 上の n 次元ベクトル空間 V（離散位相を入れる）への W_K の表現 $r : W_K \longrightarrow GL(V)$ と $N \in \mathrm{End}(V)$ の組 (r, N) で，全ての $\sigma \in W_K$ に対して

$$\sigma|_{K^{\mathrm{ur}}} = \mathrm{Frob}_K^b \ (b \in \mathbb{Z}) \implies r(\sigma)Nr(\sigma)^{-1} = q^{-b}N$$

$(q := |\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K|)$ をみたすものを指す．r が半単純であるとき，(r, N) は **Frobenius 半単純**（F-**半単純**）であるといい，一般に (r, N) に対してその F-**半単純化** $(r, N)^{F\text{-ss}}$ が定まる．

Weil-Deligne 表現の概念は，本質的に Ω の取り方に依らない（体同形 $\iota : \Omega \to \Omega'$ によって Ω 上の Weil-Deligne 表現 (r, N) と Ω' 上の Weil-Deligne 表現 $\iota(r, N)$ は一対一に対応する）．しかし，これらは全ての素数 $\ell \neq p$ に対して W_K の $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上のベクトル空間への連続表現と対応する：

定理 17. (**Grothendieck の monodromy 定理** [ST], [SGA7] Exposé I)
n を正整数，ℓ を剰余標数 p と異なる素数とするとき，次のような一対一対応がある[5]：

$$\{\ W_K \text{ の } \overline{\mathbb{Q}}_\ell \text{ 上の } n \text{ 次元連続表現 } \} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\ W_K \text{ の } \overline{\mathbb{Q}}_\ell \text{ 上の } n \text{ 次元 Weil-Deligne 表現 } \}$$
$$\rho \longmapsto \mathrm{WD}(\rho)$$

$\ell = p$ のときも，G_K の p 進表現 ρ が de Rham ([Fo]) であれば，Berger の結果 ([Be]) により，Fontaine の関手 D_{pst} を用いて Weil-Deligne 表現 $\mathrm{WD}(\rho)$ を得るが，一対一対応ではなくなる．

定理 18.（**局所 Langlands 対応** [HT], [He], [Ha]）任意の正整数 n に対して，一対一対応：

$$\{\ GL_n(K) \text{ の } \mathbb{C} \text{ 上の既約許容表現 } \} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{W_K \text{ の } \mathbb{C} \text{ 上の } n \text{ 次元 } F\text{-半単純 Weil-Deligne 表現 } \}$$
$$\pi \longmapsto \mathrm{rec}(\pi)$$

で，いくつかの性質（ここでは述べない）によって唯一に特徴づけられるものが存在する．$n = 1$ のときは，$\mathrm{rec}(\pi) = \pi \circ \mathrm{Art}_K^{-1}$ である．

ここでは不分岐な場合について述べておく．$GL_n(K)$ の $\mathbb{C}$ 上の既約許容表現 π は，0 でない $GL_n(\mathcal{O}_K)$-不変ベクトルを含むとき，**不分岐主系列表現**という．これらは，佐武同形 ([Sat])：

$$\mathbb{C}[GL_n(\mathcal{O}_K)\backslash GL_n(K)/GL_n(\mathcal{O}_K)] \cong \mathbb{C}[X_1^{\pm}, \ldots, X_n^{\pm}]^{S_n} \quad (S_n \text{ は } n \text{ 次対称群})$$

により，**佐武パラメータ** $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{C}^\times)^n/S_n$ で分類される．一方 W_K の Weil-Deligne 表現 (r, N) は，$r|_{I_K} = 1$ かつ $N = 0$ のとき**不分岐**という．この場合の局所 Langlands 対応：

$$\{\ GL_n(K) \text{ の不分岐主系列表現 } \} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{W_K \text{ の } \mathbb{C} \text{ 上の } n \text{ 次元 } F\text{-半単純不分岐 Weil-Deligne 表現 } \}$$

は，$\mathrm{rec}(\pi) = (r, 0)$ とするとき，$(\mathbb{C}^\times)^n/S_n$ における次の等号で特徴づけられる：

$$\{\ \pi \text{ の佐武パラメータ } \} = \{\ r(\mathrm{Frob}_K) \text{ の固有値 } \}.$$

大域 Langlands 対応　L を代数体とする．ここでは，G_L の n 次元 ℓ **進表現**とは，連続準同形 $R : G_L \to GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ で，(i) ℓ を割る任意の素点 v に対し $R|_{G_{L_v}}$ は de Rham，(ii) ほとんど全ての有限素点 v に対し $R|_{W_{L_v}}$ は不分岐，の二つの条件をみたすものを指す．

予想 19.（**大域 Langlands 対応**）素数 ℓ と体同形 $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$ を固定する．任意の正整数 n に対して，次のような一対一対応：

$$\{\ GL_n(\mathbb{A}_L) \text{ の代数的尖点保型表現 } \} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\ G_L \text{ の } n \text{ 次元既約 } \ell \text{ 進表現 } \}$$
$$\Pi \longmapsto R_{\ell,\iota}(\Pi)$$

が存在する．この対応は，$\Pi = \otimes_v \Pi_v$（Π_v は $GL_n(L_v)$ の既約許容表現）ならば，ほとんど全ての有限素点 v に対して局所 Langlands 対応との整合性：

$$\iota \mathrm{WD}\big(R_{\ell,\iota}(\Pi)|_{W_{L_v}}\big)^{F\text{-ss}} = \mathrm{rec}\big(\Pi_v^\vee \otimes |\det|^{\frac{1-n}{2}}\big) \tag{10}$$

をみたすという性質で特徴づけられる．($\Pi_v^\vee$ は Π_v の反傾表現，$|\det|$ は不分岐指標 $g \mapsto |\det(g)|_{L_v}$ を指す．局所体 K と $x = a\pi^b \in K^\times$ に対して $|x|_K := q^{-b}$（再び $q := |\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K|$) である．)

[5] この対応は，$\mathrm{WD}(\rho) = (r, N)$ とし，$\varphi \in W_K$ を $\varphi|_{K^{\mathrm{ur}}} = \mathrm{Frob}_K$ なる元，$t_\ell : I_K \to \mathbb{Z}_\ell$ を ℓ 進馴分岐指標とすると，任意の $b \in \mathbb{Z}$ と $\sigma \in I_K$ に対して $\rho(\varphi^b\sigma) = r(\varphi^b\sigma)\exp(t_\ell(\sigma)N)$ で特徴づけられる．

この特徴づけに関して，ほとんど全ての素点 v に対しては Π_v は不分岐主系列表現であるから，整合性は佐武パラメータと Frobenius の固有値の比較であることに注意せよ．$n=1$ かつ $\Pi|_{L_\infty^{\geq 0}} = 1$ のときは大域類体論（定理 15），すなわち $\iota R_{\ell,\iota}(\Pi) = \Pi^\vee \circ \mathrm{Art}_L^{-1}$ である．$n>1$ に対する予想 19 はまだ解決からは程遠く，1999 年に解決された**谷山・志村予想**が $n=2$ かつ $L=\mathbb{Q}$ の場合の一部に当たる．尖点的でない保型表現と可約な Galois 表現の間にも深い関連があるが，半単純でない Galois 表現に対応すべき保型表現側の現象にはまだ謎が多い．

4 虚数乗法論と志村多様体論

ここでは，前節に紹介した類体論・Langlands 対応の代数幾何学的構成を与える理論を紹介する．これらは，類体論に関しては $\mathbb{Q}$ および $\mathbb{Q}_p$ の場合の定理 7，定理 9 の (A) を一般化する構成であり，さらにそれを一般化する Langlands 対応（定理 18・予想 19）に関しては，一対一対応の $\longrightarrow$（GL_n の表現 $\to$ n 次元 Galois 表現）の方向の構成である．

Lubin-Tate 理論（局所類体論） K を局所体とし，その素元 π を一つ固定する．同形：

$$K^\times \ni a\cdot\pi^b \longmapsto (a,b) \in \mathcal{O}_K^\times \times \mathbb{Z} \tag{11}$$

に注意する．$\mathcal{O}_K$ 代数 A 上の **$\mathcal{O}_K$-Lubin-Tate 群**とは，A 上定義された可換 1 次元形式 $\mathcal{O}_K$ 加群 F，すなわち $\mathcal{O}_K$ 乗法（環準同形 $\mathcal{O}_K \ni a \mapsto [a] \in \mathrm{End}(F)$）をもつ形式群で，高さ 1（$\pi$ 倍写像の次数が $q=|\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K|$ に等しい）のものである．素元 π に対し，$\mathcal{O}_K$ 上の $\mathcal{O}_K$-Lubin-Tate 群 F_π で π 倍写像が $[\pi](X)=\pi X + X^q$ となるものが一意に定まる．正整数 m に対して，F_π の π^m-等分点（π^m 倍写像の核）を $\boldsymbol{\mu}_{\pi,m} := F_\pi[\pi^m] \subset \overline{K}$ とし，$K^{\mathrm{ram}} := \bigcup_m K(\boldsymbol{\mu}_{\pi,m})$ と定めると，$\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ram}}$ の場合と同様にして，次の Abel 群の同形を得る：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ram}}/K) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{O}_K^\times \\ (\zeta \mapsto [a \bmod \pi^m](\zeta)) & \longmapsto & a \qquad (\zeta \in \boldsymbol{\mu}_{\pi,m}) \end{array}$$

そこで $K^{\mathrm{LT}} := K^{\mathrm{ur}} \cdot K^{\mathrm{ram}}$ および $G_K^{\mathrm{LT}} := \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{LT}}/K)$ と定義すると，$K^{\mathrm{ur}} \cap K^{\mathrm{ram}} = K$ だから，次の定理の (A) を得る：

定理 20. （**Lubin-Tate 理論** [LT]） K を局所体とする．

(A) （**Lubin-Tate 拡大の Galois 群**） K の素元 π は次の同形を定める：$G_K^{\mathrm{LT}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_K^\times \times \widehat{\mathbb{Z}}$.

(B) （**局所 Kronecker-Weber**） 次は同形である：$G_K^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\cong} G_K^{\mathrm{LT}}$，すなわち $K^{\mathrm{LT}} = K^{\mathrm{ab}}$.

(C) (A),(B) の同形の逆と同形 (11) を合成して得られる写像 $K^\times \to G_K^{\mathrm{ab}}$ は Art_K に一致する．

K の任意の有限次不分岐拡大 K' の整数環 $\mathcal{O}_{K'}$ 上にも $\mathcal{O}_K$-Lubin-Tate 群が定義され ([dS])，その等分点への G_K の作用は $\mathrm{Art}_K^{-1}|_{G_{K'}} : G_{K'} \to \mathcal{O}_K^\times$ を経由する．これらの Lubin-Tate 理論から始めて，局所類体論を直接証明することもできる ([Iw], [Y3]).

虚数乗法論（大域類体論）　$L=\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ を虚 2 次体とし，$\mathcal{O}_L$ をその整数環とする．埋め込み $\tau : L \subset \mathbb{C}$ を一つ固定する．E を $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線で $\mathcal{O}_L$ 乗法（環準同形 $\mathcal{O}_L \ni a \mapsto [a] \in \mathrm{End}(E)$）をもつものとし，誘導される $\mathcal{O}_L$ の $\mathrm{Lie}(E)$ への作用は τ と整合的であるとする．

定理 21. （**虚数乗法論** [Deu], [Sh1]） L, E を上の通りとし，$j(E)$ を E の j-不変量，正整数 N に対し $E[N]$ を E の N 等分点のなす群とする．また，$\widehat{\mathcal{O}}_L := \mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}$ とおく．

(B) $H := L(j(E))$ は L の Hilbert 類体 ($\mathbb{A}_L^\times/\widehat{\mathcal{O}}_L^\times L^\times \mathbb{C}^\times \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gal}(H/L)$) で，$L^{\mathrm{ab}} = \bigcup_N H(E[N])$．

(A) L のほとんど全ての有限素点 v とその上にある H の素点 w に対し，E の $\mathcal{O}_{H_w}$ 上のモデル $\mathcal{E}$ から得られる形式群 $\widehat{\mathcal{E}} := \mathcal{E}[v^\infty]$ は $\mathcal{O}_{L_v}$-Lubin-Tate 群となる．(従って，$\widehat{\mathcal{O}}_L$ 加群 $\bigcup_N E[N]$ への G_H の作用は $\mathrm{Art}_L^{-1}|_{G_H} : G_H \to \widehat{\mathcal{O}}_L^\times$ を経由する．)

$[L^+ : \mathbb{Q}] = d$ なる総実代数体 L^+ の総虚な 2 次拡大体（**CM 体**）L に対して，$\mathcal{O}_L$-乗法をもつ d 次元 Abel 多様体を考えて同様の理論を考えることで，CM 体上の Abel 拡大の一部を構成することができる（谷山・志村，[Sh2]）．

非可換 Lubin-Tate 理論（局所 Langlands 対応）　K を剰余標数 p の局所体とし，π をその素元，$|\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K| = q$ とする．正整数 $n \geq 1$ に対し，$\overline{\mathbb{F}}_q$ 上の可換 1 次元形式 $\mathcal{O}_K$ 加群で高さ n（π 倍写像の次数が q^n）のもの Σ_n が同形を除いて唯一つ定まる．$W := \widehat{\mathcal{O}}_{K^{\mathrm{ur}}}$ とおくと，$\overline{\mathbb{F}}_q$ を剰余体にもつような完備 Noether W 代数の圏 $\mathcal{C}$ において，$\mathcal{C}$ の対象 R に Σ_n の R への変形（R 上の形式 $\mathcal{O}_K$ 加群 Σ と同形 $i : \Sigma_n \xrightarrow{\cong} \Sigma \otimes_R \overline{\mathbb{F}}_q$ の組 (Σ, i)）の同形類の集合を対応させる関手は W 上の $(n-1)$ 変数形式べき級数環 $A_0 := W[[T_1, \ldots, T_{n-1}]]$ で表現される．さらに，正整数 m に対して，Drinfeld レベル $\mathfrak{p}_K^m$ 構造つきの変形に対して変形環 A_m を考えると，これは A_0 上の有限平坦代数かつ n 次元正則完備局所環で，A_m/A_0 は W の商体をテンソルするとエタール Galois 被覆で Galois 群は $GL_n(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K^m)$ となる ([Dr])．$X_m := \mathrm{Spec}(A_m \otimes_W \overline{\widehat{K}^{\mathrm{ur}}})$ とおく．

定理 22. （**非可換 Lubin-Tate 理論** [Ca1], [HT]；[Y2] を参照）素数 $\ell \neq p$ に対して ℓ 進消滅サイクルコホモロジー群 $\varinjlim_m H^{n-1}_{\text{ét}}(X_m, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を考えると ([SGA7])，これは $I_K \times GL_n(\mathcal{O}_K)$ の作用をもつ．このベクトル空間から $W_K \times GL_n(K)$ の作用をもつベクトル空間を構成することができ，その表現の分解が尖点表現に対する局所 Langlands 対応を実現する[6]．

志村多様体論（大域 Langlands 対応）　ここでは詳しい定義は紹介しないが，虚数乗法論の「高次元化」として，**PEL 型志村多様体**とよばれる研究対象がある．これは，偏極 (Polarization)・自己準同形環 (Endomorphism ring)・レベル構造 (Level structure) の 3 つの付加構造をもった Abel 多様体のモジュライ空間で，symplectic / orthogonal / unitary の 3 つの型がある ([K1])．例えば虚数乗法論は 0 次元 unitary 型志村多様体，モジュラー曲線は 1 次元 symplectic 型志村多様体の例となる．PEL 型志村多様体はある代数体 (reflex field) L 上定義された代数多様体となり，$\mathbb{C}$ 上では付加構造つき Hodge 構造のモジュライ空間だから Hermite 型対称空間の算術

[6] 正確には，[HT], Theorem VII.1.5 で計算されているのはコホモロジー群の交代和である．尖点表現が中間次数にしか表れないことの証明は，[Fa] の末尾に注意されている．

商となる．PEL 型志村多様体（およびその上の ℓ 進層）の ℓ 進エタールコホモロジー ([SGA4], [SGA4.1/2]) を考えてレベル構造に関して極限を取ると，志村多様体の型に対応した $\mathbb{Q}$ 上の簡約代数群 G の $\mathbb{A}^\infty$ 有理点群 $G(\mathbb{A}^\infty)$ と reflex field の絶対 Galois 群 G_L が作用する．この表現の分解が $G(\mathbb{A}^\infty)$ の尖点保型表現に対する大域 Langlands 対応を実現することを示すには，ほとんど全ての素点での志村多様体の有限体への（滑らかな）還元について，Hecke 作用素と Frobenius 写像に関して Arthur-Selberg 跡公式と Lefschetz 跡公式を比較して，不分岐局所 Langlands 対応が実現していることを確かめることができればよい（一般には様々な困難が伴う）．G として GL_n は現れないが，unitary 群は GL_n の outer form であるから，総実体上の unitary 群から CM 体上の GL_n への base change を用いることで，次が示されている：

定理 23. ([K2], [Cl], [HT]) L を CM 体とし，Π を $GL_n(\mathbb{A}_L)$ の代数的尖点保型表現で (i) 正則, (ii) 共役自己双対（複素共役 c について $\Pi^c = \Pi^\vee$），(iii) L のある有限素点 w で Π_w は二乗可積分，の 3 つの条件をみたすものとする．このとき，$U(1, n-1) \times U(0, n) \times \cdots \times U(0, n)$ 型の志村多様体上のある ℓ 進層の $(n-1)$ 次 ℓ 進エタールコホモロジー群に，大域 Langlands 対応によって対応する Galois 表現 $R_{\ell,\iota}(\Pi) : G_L \longrightarrow GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ が現れる．

さらに，この場合の志村多様体の悪い還元（滑らかでない還元）を詳しく調べることによって，次が知られている：

定理 24. ([HT], [TY]) 上の定理の場合の Π に対して，大域 Langlands 対応と局所 Langlands 対応の整合性 (10) が全ての ℓ を割らない有限素点 v に対して成り立つ.（従って，Π の L 関数と $R = R_{\ell,\iota}(\Pi)$ の L 関数は一致する[7]：$L(\Pi, s) = L(R, s)$.）

このような整合性の証明のアイデアは Deligne の手紙 [De3] に遡る．$\mathbb{Q}$ 上の GL_2 の正則保型形式の場合の，定理 23 に対応するモジュラー曲線を用いた構成は Eichler-志村（重さ $k = 2$, [Sh1]）および Deligne（重さ $k \geq 2$, [De1]）によって示されている．保型形式のレベルを割る素数でのモジュラー曲線の悪い還元 ([KM]) のコホモロジーを計算することで，この場合の整合性が示され ([De3], [Ca2])，同時に対応する場合 ($K = \mathbb{Q}_p$, $n = 2$) の非可換 Lubin-Tate 理論（定理 22）も示される．これは，モジュラー曲線の整数環上のモデルの局所環として，非可換 Lubin-Tate 理論で用いられる形式 $\mathcal{O}_K$ 加群の変形環が現れることによる．Harris-Taylor は藤原の跡公式 ([Fu1]) および Berkovich 解析空間の理論を用いて，この方法を一般次元の特殊な unitary 型志村多様体に拡張することで，定理 24 の（Weil-Deligne 表現の）N に関する部分を除く整合性および定理 22 を証明した．[TY] では，さらに半安定還元の場合の重さスペクトル系列 ([RZ], [Sai]) の各項を計算することで N に関する整合性を示した（これは，この志村多様体に関する**ウェイト・モノドロミー予想**の特殊な場合にあたる）．その証明では，まず [HT] の結果からこの場合の**一般 Ramanujan 予想**（全ての有限素点での局所成分 Π_v が tempered であること）が従うことが本質的に使われる[8]．定理 24 の $v \mid \ell$ の場合も，p 進重さスペクトル系列 ([M]) の関手性さえ得られれば従う ([TY]).

[7] ただし，$v \mid \ell$ での整合性が示されない限りは，$L(R, s)$ の ℓ での局所因子は異なる素数 ℓ' での $R_{\ell',\iota'}(\Pi)$ を用いて求める必要がある．

[8] この一般 Ramanujan 予想 ([HT], Corollary VII.1.11) の証明は [De1] の "Weil implies Ramanujan" と同じ論法だが，悪い還元の場合のコホモロジーが整数の重さをもつことは，Weil 予想に de Jong の alteration および重さスペクトル系列を組み合わせてはじめて従う．これに Tadic による局所体上の GL_n のユニタリ表現の分類 ([HT], Lemma I.3.8) を組み合わせる．

現時点で知られている局所 Langlands 対応の証明は全て大域的な構成に依存するものであり，とくに非可換 Lubin-Tate 理論については，Deligne-Lusztig 理論 ([DL]) に帰着できるごく特殊な場合（[Y1]；[Y2] を参照）を除いて，局所的な手法での証明は知られていない．可換な場合の Lubin-Tate 理論とその関手性，およびそれを用いた局所類体論の証明が非常に見通し良くできる ([Y3]) ことから考えても，局所的な構成から直接に非可換 Lubin-Tate 理論とその関手性が証明されることが望ましい．円分体の場合に見たように，局所的な対応の特徴づけは大域的な対応との整合性と深く関連しているため，現時点では大域的な対応との整合性と馴染みやすい特徴づけの方法が用いられている．もし局所 Langlands 対応の局所的な証明が得られるとしたら，それは局所類体論の場合と同様に，より内在的な関手性による特徴づけに基づくものになるかもしれない．より詳しい最近の発展に興味のある方は，局所 Langlands 対応については [Ha]，大域 Langlands 対応については [Tay] を参照されたい．

謝辞　今回代数学シンポジウムで講演させていただく貴重な機会を下さったオーガナイザーの先生方に厚く感謝します．また，本稿を詳しく読んで頂いた伊藤哲史氏（京大理）に感謝します．

参考文献

[AT] E. Artin, J. Tate, *Class Field Theory.* W. A. Benjamin, 1968.

[Be] L. Berger, *Représentations p-adiques et équations différentielles*, Invent. Math. **148** (2002), 219–284.

[Ca1] H. Carayol, *Non-abelian Lubin-Tate theory*, in: *Automorphic Forms, Shimura Varieties, and L-functions* (Academic Press, 1990), pp.15–39.

[Ca2] H. Carayol, *Sur les représentations ℓ-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. E.N.S. **19** (1986), 409–468.

[Cl] L. Clozel, *Représentations Galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduals de $GL(n)$*, Publ. Math. IHES **73** (1991), 97–145.

[De1] P. Deligne, *Formes modulaires et représentations ℓ-adiques*, Séminaire Bourbaki 355 (février 1969); Springer LNM **179** (1971), 139–172.

[De2] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*, in: *Modular functions of one variable II*, Springer LNM **349** (1973), 501–595.

[De3] P. Deligne, *Letter to Piatetski-Shapiro* (1973).

[dS] E. de Shalit, *Relative Lubin-Tate groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **95** (1985), 1–4.

[Deu] M. Deuring, *Die Klassenkörper der Komplexen Multiplikation*, Enzyklop. d. math. Wissensch. I 2.2. Aufl. Heft 10-II, 1958.

[DL] P. Deligne, G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann. of Math. **103** (1976), 103–161.

[Dr] V. Drinfeld, *Elliptic modules*, Math. USSR Sbornik **23-4** (1974), 561–592.

[Fa] G. Faltings, *A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld.*, in: *Algebraic number theory and algebraic geometry*, Contemp. Math. **300** (2002), AMS, 115–129.

[Fo] J.-M. Fontaine, ed., *Périodes p-adiques (Séminaire de Bures, 1988)*, Astérisque **223** (1994).

[Fu1] K. Fujiwara, *Rigid geometry, Lefschetz-Verdier trace formula and Deligne's conjecture*, Invent. Math. **127**-3 (1997), 489–533.

[Fu2] 藤原一宏，非可換類体論のめざすもの,「数学のたのしみ」17 号，日本評論社，2000.

[Ha] M. Harris, *On the local Langlands correspondence*, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Beijing 2002, Vol II, 583–597.

[He] G. Henniart, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $GL(n)$ sure un corps p-adiques*, Invent. Math. **139** (2000), 439–455.

[HT] M. Harris, R. Taylor, *The Geometry and Cohomology of Some Simple Shimura Varieties*, Ann. of Math. Studies **151**, Princeton Univ. Press, Princeton-Oxford, 2001.

[Iw] K. Iwasawa, *Local Class Field Theory*, Princeton Univ. Press, 1986.

[K1] R. Kottwitz, *Points on some Shimura varieties over finite fields*, J. Amer. Math. Soc. **5**-2 (1992), 373–444.

[K2] R. Kottwitz, *On the λ-adic representations associtated to some simple Shimura varieties*, Invent. Math. **108** (1992), 653–665.

[KM] N. Katz, B. Mazur, *Arithmetic Moduli of Elliptic Curves*, Ann. of Math. Studies **108**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1985.

[LT] J. Lubin, J. Tate, *Formal complex multiplication in local fields*, Ann. Math. **81** (1965), 380–387.

[M] A. Mokrane, *La suite spectrale des poids en cohomologie de Hyodo-Kato*, Duke Math. J. **72**-2 (1993), 301–337.

[RZ] M. Rapoport, T. Zink, *Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten, Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik*, Invent. Math. **68**-1 (1982), 21–101.

[Sai] T. Saito, *Weight spectral sequences and independence of ℓ*, J. Inst. Math. Jussieu **2** (2003), 583–634.

[Sat] I. Satake, *Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over $\mathfrak{p}$-adic fields*, Publ. Math. IHES **18** (1963), 5–69.

[Se] J.-P. Serre, *Local Fields*, Springer GTM **67**, 1979.

[ST] J.-P. Serre, J. Tate, *Good reductions of abelian varieties*, Ann. Math. **88** (1968), 492–517.

[SGA4] A. Grothendieck, et al., *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4)*, Lecture Notes in Math. **269**, **270**, **305**, Springer, 1972/73.

[SGA4.1/2] P. Deligne, et al., *Cohomologie Etale (SGA 4.1/2)*, Lecture Notes in Math. **569**, Springer, 1977.

[SGA7] A. Grothendieck, et al., *Groupes de Monodromie en Géometrie Algébrique (SGA 7)*, Lecture Notes in Math. **288**, **340**, Springer, 1972/73.

[Sh1] G. Shimura, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Iwanami / Princeton UP, 1971.

[Sh2] G. Shimura, *Abelian Varieties with Complex Multiplication and Modular Functions*, Princeton UP, 1998.

[Ta] J. Tate, *Number Theoretic Background*, in: A. Borel and W. Casselman, ed., *Automorphic Forms, Representations and L-functions*, Proc. Symp. in Pure Math. **33**-2, AMS, 1979.

[Tay] R. Taylor, *Galois representations*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **13**-1 (2004), 73–119.

[TY] R. Taylor, T. Yoshida, *Compatibility of local and global Langlands correspondences*, preprint 2004, `math-NT/0412357`.

[We] A. Weil, *Basic Number Theory*, 3rd ed., Die Grundlehren der Math. Wissensch. **144**, Springer-Verlag, 1974.

[Y1] T. Yoshida, *On non-abelian Lubin-Tate theory via vanishing cycles*, preprint 2004, `math.NT/0404375`, to appear in Ann. de l'Institut de Fourier.

[Y2] 吉田輝義, 非可換 Lubin-Tate 理論と Deligne-Lusztig 理論, 早稲田大学整数論シンポジウム報告集, May 2004.
`http://abel.math.harvard.edu/~yoshida/waseda2004proc.pdf`

[Y3] T. Yoshida, *Local class field theory via Lubin-Tate theory*, preprint 2005.
`http://abel.math.harvard.edu/~yoshida/lcft.pdf`