

書評

原田 耕一郎 著

「群の発見」

岩波書店 248 ページ、2001年11月21日刊

梅田駅前の書店で初めて手に取ったとき、新奇な書名と、帯に付けられた情緒的な宣伝文句に驚かされた。「群」という存在は自然界にもともと潜んでいたものであり、それが「発見」され、次第に我々人間に身近な存在になっていく過程を描き出そうとしたのが本書である—そんな著者の主張が伝わってくるような書名だ。「美しいものには隠れた対称性がある」という標語の中でも、「美」と「隠」の字が意図的に重ねられている。「死を前にしたガロアの心の叫びを聴く」という名文句に至っては、映画かなんかの宣伝と勘違いしそうである。

多少型破りな入門書のようにだと予測しつつ序文を立ち読みする。どうやら「小説群論」という意図で書かれたようだ。書名から受けた印象が裏打ちされる。これはなかなか面白そうだと、と本文をぱらぱらめくってみる。すぐ目に飛び込んだのが「ちょっと考えてみよう」という表題の付けられた四角囲みである。なにやら受験参考書を思わせる。「研究課題」なんてのもある。はて、どんな問題が載っているのかな？つい目にしたのが研究課題4.1であった。これは群の実例を色々知っていないと出来ない。この問題を考え始めたらそれに夢中になってしまい、結局その日は本書を買いそびれた。そんなわけで、「異色の入門書のようなが、案外難しいことが書いてある」という印象が残った。

今回書評を書くにあたって通読して感じたのは、「かなり欲張った意図を持つ本だ」という思いである。方程式の解法問題を歴史的に追いつつ、群という概念を導入し、群論、体論及びガロア理論への入門を果たすという数学的企画と、方程式論の発展に寄与した数学者、特にアーベルとガロアの生涯の解説という読み物的企画が渾然一体となっているのである。そのため、数学入門書としては体系的ではない。定義や概念はそれが必要になったときに導入される。群の「表示」もはっきり定義されないまま登場するし、「正規部分群」の導入にも多少無理がある。しかし、この本には、そんな些細な点を気にさせない魅力がある。

現代数学を多少研究した人間で、日本語を解するものは、本書を小説群論として十分に楽しめるだろう。一気呵成の通読に引き込む語り口の妙と、なるほどそんなこともあったかと思わせる題材選びのうまさがある。群論の世界的研究者としての著者の叡智がさりげなくちりばめられている。

一方、初学者にとっては、叙述が体系的でないだけに、理解しにくい部分

もあろう。だが、それを補って読み進ませるだけの楽しさが十分に盛り込まれている。群論の初歩を形式的な講義などで学び、ガロア理論などに触れつつある学生が、自力でゆっくり時間をかけて読むのにふさわしい本と思う。

「シンメトリー」という感性に訴えかける用語を、頻繁に使用するのも本書の工夫の一つである。シンメトリーとは「ある「形」を適当に動かして、もとの形に重ねることの出来るときの、その動かし方のことである」と説明される。この「形」というのがくせ者で、実感しやすい平面や空間中の図形ばかりではない。単なるものの集まり（集合）や、数の集まり（体）、宇宙空間、方程式といったものなど、多種多様である。「形」のシンメトリーの全体に、引き続いて動かしたり、逆に動かすという操作を考えたとき、構造が与えられる。それを「群」という。「群」は「形」の対称性を質的に測る便利な道具であり、群の構造についての理論（群論）は「形」に対する様々な問題の解決に役立つのである。

本書の数学的目標である「ガロア理論」は、その典型例である。この理論は「群論によって体論を理解する」ことであり、方程式のシンメトリー全体がつくる群の性質が、方程式の解法を左右していることを示す。以下、各章ごとの内容を概観しよう。

第1章では、上に述べた形で群の概念が導入され、正多面体という「形」の分析に群論を用いてみせる。ラグランジュの定理とよばれる群論の基本定理が主たる武器である。群の公理の感性的な説明が面白い。

第2章では、「5次以上の方程式にはべき根による一般的解法が存在するか？」という200年あまり数学者を悩ませた大問題の、ルフィニとアーベルによる解決に至るまでが、歴史的な発展に沿って解説される。アーベルの結果の証明は省略されている。方程式の根の置換（方程式のシンメトリー）という形で群が登場し、方程式の解法の分析に使用される。

第3章では体の拡大理論、第4章の前半では群論の基礎について入門的解説が行われて、「ガロア理論」の解説が完了する。第4章の後半では、それを用いて第2章の主題に対する更に深い結果「ガロアの主定理」を完全に証明する。この主定理により、方程式の解がべき根で解けるための判定条件が、方程式のシンメトリーのなす群の性質（可解性）によって与えられる。最後はルフィニ・アーベルの定理のガロア理論を用いた群論的な別証明で締めくくられる。

5章は線形群と楕円曲線の群構造の簡単な紹介で、やや唐突に切れている感もある。著者は「群の表現論」を主題にしたもう一つの著書を執筆中らしく、そちらへの導入の意図があるように思われる。最終章にはアーベルとガロアの簡潔な伝記が述べられている。「ガロアの心の叫び」に共感できた読者と共に「小説群論」の続編を期待したい。

（吉荒 聡）