ラウグヴィッツ「リーマン人と業績」
山本敦之　訳、
シュプリンガー・フェアラーク東京、1998年

本書は数学史の観点からのリーマン論である。私はリーマンには興味を持っているが、数学史に興味を持っているわけではないし、数学史の本を書評する立場にない。したがって書評というよりは、本書を支点としてのリーマン随想となってしまうことを、お許しいただきたい。

私はリーマンのおかげで数学をしている者なので、どのようにリーマンが興味深いか私見を述べさせてもらう。

まず、リーマンの主著ともいうべき"アーベル積分論"がある。そこでは代数関数の積分が、コンパクトリーマン面上の周期として論じられ、位相と微分形式との双対性がリーマンの関係式で記述され、さらにアーベルの定理がリーマンテータ関数を導入して証明される。さらに種数gを与えたときのリーマン面のモジュライ数$3g-3$（$g \geq 2$）が被覆面の分岐点の考察を通じて与えられる。次に"与えられた数以下の素数の個数について"と題される「リーマン予想」を追求した8ページの論文がある。さらにガウス超幾何関数を3点の特異点を有する2階フックス型常微分方程式として論じ、これを各点での（特異点の）指数で決定されるいわゆるリーマンP-関数として扱っている仕事が続く。

まだ正則関数の定義さえ整備されていなかった時代に、およそ複素解析の視点から眺めうる数学をすべて眺望し、このような深い現象世界を描き出したことに改めて驚くばかりである。さらにリーマンの数学では、つねに

"一般現象を支配しているのは、各特異点での特異性の総和である"

という主導理念を感じる。私としては、リーマン論はこのように一見離れた分野での活動が、リーマン自身の内部でどのように通底していたのかを具体性をもって論じてほしいという気がする。

さて、この本では、序章に続いて、リーマンの著作を複素解析、実解析、幾何学・物理学・哲学、の諸分野に分類して論じ、最後に"数学解釈における転換点"という、数学の観念史的発展（リーマンが"無限"をどのようにとらえていたか？それがいかに新しかったか、リーマンは"計算の代わりに理念的思考"で数学した、それがどのように画期的であったか、等々）を論じる章が設けられている。

著者はこの道の碩学らしく、軽々しく自説を展開することなく、広範な文献によって、出典を明らかにしながら、リーマンに関してのの言説を紹介してゆく。とくに、現代の数学者による記事も随所に紹介されていて（後段参照）、私にとっては貴重な情報源だと思われた。

結論から言えば序章の伝記的部分がかなり詳しく収穫である。続く"複素解析"の部分ではリーマンゼータ関数の論文についてかなり数学的に詳しい議論が展開されている。この部分以外で数学を論じた3つの章は、いわゆる数学史的なレベルにとどまっていて、歴史解釈的な議論が多くて、実りある展開は期待するのが無理である。最終章は、私には全く興味がないので議論しない。

実解析の章では、リーマンの積分論と彼以後の関数解析の発展との関連を論じているが、これも私には興味がないので割愛する。幾何学…の章では、例の就職記念講演として行われたリーマン幾何学の論文を中心として、相対性理論との関連、またカント式哲学とヘルベルトの哲学が空間概念の形成にどのように影響を与えたか与えなかかった等の議論が展開されるがこれも私には興味がない。

以下、私に興味深かった点をいくつかピックアップしてその記述を追って見る。

0)　序章では、リーマンの生い立ちと同時代の数学者たちとの交流のようすがかなり詳しく述べられている。要約すると次のようになる。

1826 年 9 月 17 日　Breselenz に牧師の子として生まれる。

生地は Wittenberge と Lüneburg の中間にあるエルベ川に近い西岸のごく小さな町である。やがて父は、さらにいなかのクヴィックボルンに赴任し、Riemann は成人してからも、その田舎の家に学期の休み等にはひきこもっていた。1855 年父が歿するとその隠棲の地が失われた。彼は、弟一人と姉妹 4 人との 6 人兄弟である。

1840 - 1842 の間、Hanover のギムナジウムに、1842 - 1846 の間 Lüneburg のギムナジウムに通う。

(全１０年間の教程のうち後期 6 年間だけ在籍し、それ以前の教育は家で父から受けていた)

当地に寄宿もしくは下宿して通学していた。(Lüneburg は Breselenz から西北西に約 45 km である) 家は裕福ではなかったが、教会関係の神学教育のための援助があったらしい。

彼の数学的才能は Lüneburg の校長がすぐに発見し、古典語学、ドイツ語の作文等では非常に苦労していたが、校長の助力で学業を続けた。とくにこの時代に Legendre の「数論」(2 元 2 次形式を同値類に分類して論じたものである) を読んで感激している。当時から彼は、人とのつきあいに困難を感じる内向的な性格であった。

「神の御前での日々の自己研鑽」が彼の行動規範であった。

1846 年 - 1847 年　　Göttingen 大学に入学

当地には 1807 年以来 Gauss (すでに 70 歳前後の) がいて、講義も聴いているが交流はなかった。

1847 年 - 1849 年　　Berlin 大学に学び、Jacobi, Eisenstein, Dirichlet との交流を持つ。とくに Dirichlet は Riemann にとって (数学上でもそれ以外でも) 最も重要な人物となる。

1849 年　Göttingen にもどって物理、哲学を学ぶ。

1850 年　　Dedekind(1831 - 1916) が Braunchweig から Göttingen に入学

1851 年　学位論文「複素 1 変数関数の一般理論のための基礎」(Gauss が審査)

1852 年　　Dedekind 学位取得

1854 年　教授資格取得講演「幾何学の基礎にある仮説について (Gauss が聴講)

1855 年　　Gauss 歿して Dirichlet が後任として Göttingen に赴任

1857 年　「アーベル関数論」

1857 年　「ガウスの級数 $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ によって表される関数について」

1858 年　　Dedekind Zurich ETH に就職

3 人の姉妹をひきとって同居する (精神的な安定をとりもどす)

1859 年　　Dirichlet 歿して Riemann が Göttingen の正教授になる。

1859 年　　Berlin 訪問 (Kummer, Kronecker, Weierstrass に会う)

1860 年　　Paris 訪問 (Serret, Bertrand, Hermite, Puiseux, Briot, Bouquet らと会う)

1862 年　　結婚 (妹の友達と)。この頃から健康を特に害する。静養のため、冬期イタリア (シチリア) に滞在。

Dedekind Braunchweig 工科大学 (Göttingenn の近く) に戻ってくる

1863 年　　シチリアからの帰途 Pisa 訪問、その年の冬に再訪、その後もしばしば訪れ、Göttinngen よりもイタリアに滞在する期間の方が長くなる。

(Betti, Beltrami, Bianchi, Ricci, Levi-Civita, Casorati らと交流)

1865 年　「テータ関数論」

1866 年 7 月 20 日 Maggiore 湖畔 セラスカで歿する。

1)　多くの現代の数学者による論考が引用され、文献も明示されているのがありがたい。原著者の見識と同時に、訳者の苦労がうかがわれたが非常に有益であった。たとえば、

G.Frey, 'Heinrich Weber and the emergence of class field theory', in Rowe-McCleary , The history of modern mathematics I,II. Academic Press, 1989 vol.I, 425-450

R. Remmert,'Komplexe Analysis in Sturm und Drang(Laudatio auf H. Grauert)', DVM Mitteilungen 1(1993), 5-13

P. Griffiths, 'Variations on a Theorem of Abel', Inventiones Math., 35(1976), 321-390

J. Gray,'Algebraic geometry in the late 19th century', in Lowe-McCleary 1989, vol. I, 361-385

などというものを私は知りませんでした。

2) 1962年の訪問以来 Riemann にとってイタリアとくにピサが静養の地であり、同時に親しい数学者たちとの交流を楽しむことができる土地であったこと。そしてピサでの Riemann との交流を通じて Betti らによって今日の微分幾何学の基礎が作られていったことが興味深かった。

3) Riemann は Berlin および Göttingenn の双方で Dirichlet との交渉が深く、それによって、Dirichlet 級数を通じて数論を展開する手法、さらにフーリエ級数と Dirichlet 級数との対応（メリン変換）にも導かれたことが素数分布の論文の項で具体的に述べられている。

4) Göttingen　で親しかった Dedekind さらに Weber を通じて1変数代数関数論を代数的に構成し代数的整数論との構造的類似を得て行くという方向が見い出され、それが、さらにドイツにおける代数学の台頭へとつながっていることを知りました。Dedekind は Riemann より年下であるが、保護者的役割も果たしていたという。

4) その一方 Riemann の P-関数の仕事と Fuchs の確定特異点型微分方程式論さらに Schwarz 関数、保型関数とのつながりが、余り論じられていないのが、私としては物足りない気がした。

以下少し余談を続ける。たとえば、P-関数に関しての論文で Riemann は幾つもの P-関数どうしの等式を導いている。それは、先行する Kummer による、特異点 $\{0,1,\infty\}$ の交換から生じる２４個の等式を含んでいる。近年、超幾何関数に対しては Riemann の周期関係式を拡張した双対公式が知られていて、その双対公式から体系的に超幾何関数間のいくつもの等式が導かれる。では、 Riemann の中に超幾何関数とその解の Riemann 面の周期関係式を通して、双対性を微分方程式にまで拡張する考えの萌芽が見られるのであろうか？

Riemann は1変数複素解析学を確立し、" 特異点の解析" によって眺望しうる限りの数学の風景を提示したものと私は考える。

ライト兄弟は航空機の歴史をの開拓者であったが、そう成り得たのは、それ以前のパイオニアが" 鳥の飛び方をまねる" 試みを繰り返していたのに対して、飛行を科学的にとらえて、いかにして人を支えるだけの浮力を空気力学的に創出するかという問題に置き換えたこと。それを具体化する手段を、彼等の職業であった自転車業のアイデアから得た。からである。

しかし、その後の航空発展史の中でライト兄弟はすぐに取り残される。彼等のメリットであった自転車業的なアイデアが、双発モーターの連動法では逆に足かせとなっていったからであった。

Riemann においても、彼の複素解析的思考法は当時の世界では画期的な新鮮さを持っていた。しかし、現代の目から見たときに、それが逆に Riemann の数学の限界を定めるものともなっていったのではないかと思う。たとえば、ゼータ関数はもはや複素解析の範疇のみに留めて考察するべきものとは思われない。（参照　加藤和也、「解決！フェルマーの最終定理（現代数論の軌跡）」、日本評論社、および、ICM '98 での Deninger の招待講演）しかしながら、本書のリーマンゼータ関数の論文に関する記述は（数学的にすべてフォローできるようには書かれていないが）なかなか力作である。Edwards,Riemann's Zeta Function, Academic Press (1974) の序章と並べて読んで見ると非常に面白い。

この Riemann のすごさと限界とが接しているのが P-関数の論文ではないかと私は想像している。

（志賀 弘典，千葉大学理学部）