

書 評

数学解析第一編 微分積分学 第1巻 改訂新編

藤原松三郎 著, 浦川肇, 高木泉, 藤原毅夫 編著

内田老鶴圃, 2016 年

首都大学東京理工学研究科

澤野 嘉宏

いつの時代でもそうであるが、 ε - δ 論法が大学生にとっては鬼門で、実際にこれが数学科を除いた学科の学生には必要はないという見識が広まったために、 ε - δ 論法を必要としない教科書がはやっていた。そのような中でこの書籍は ε - δ 論法をここまで丁寧にやるのかと思うくらいに、懇切丁寧に書かれている昔ながらの書籍である。評者の学生時代に勉強した、講義で聞いた内容がよみがえるようで懐かしかった。

この書籍は解析学や微分積分の入門書として位置づけられる。以前あった書籍は文語体で書かれていたために、現代流の仮名遣いに変更して復刊された書籍である。日本語の書籍がこのように増えることは非常に喜ばしい。著者が学生のころは [1, 2] などが解析学の参考書の主流であった。本書は第1巻と第2巻からなり、本書評では第1巻を解説する。ページ数は第1巻だけでも640ページあり、例が多いせいか [1, 2] とくらべてもページ数が多い。ページ数が多い書籍は学生の時分では避けられる傾向にあるが、それでも [1, 2] と同様に研究者、教育者になる際には必須の書籍になるであろう。なお、第2巻は複素解析やベクトル解析などを論じている。

上述の通りこの書籍は微分積分の書籍であるが、初めに書いてある「凡例」は数学のあり方を著者が論じている。これはあらゆる数学者が心に留めておくべきであろう。書籍の詳しい説明に入る前に、一部を原文のまま記載する。

- (1) 微分積分に関する事項は、これを一巻にまとめることを得ば、非常に便利である。
- (2) 定義、述語および記号のあるものは、未だ学界では一定していない。これは不幸な現象であるが、今のところ如何ともしがたい。
- (3) 16ページにわたる巻末の文献補遺において、定理、公式等の出所をできるだけ詳しく調べて書き加えることにした。これは第二義的なもので、多くの読者に対しては、これほど下らないものはないかもしれないが、さて何らかの機会にこれを知ろうとすると、なかなか見当のつかぬものである。故に如何に下らぬものでも、どこかに書き付けておけば、また何かの役に立つこともあるであろうというのが著者の心持である。
- (4) 定積分のかなり詳しい表が附加したかったのであるが、(中略)

本書は4章からなり、その構成は以下の通りである。1章、基本概念、2章、微分、3章、積分4章、二変数の関数(二変数は原典のまま)となる。1章の最初の部分は実数

の切断などが書いてあり、難しい部分ではあるが、それが仮に分からなくても2章から4章の計算例は非常に分かりやすい。解析学の初歩における困難として実数の切断などが理解できないという問題点があるが、そのような読者も分からない部分は一度飛ばして全体を見てみると微分積分の全体像が見えてくるであろう。話が若干変わるが、評者はただいまルベグ積分を担当しており、たまたま本書評を書いたときは演習問題の採点をした直後であった。その採点をしたときにつくづく感じたことは解析学は実際に手を動かして計算することで初めて会得できるということである。

本書の書評に戻ろう。本書は先ほどの述べたとおり ε - δ 論法を丁寧に述べているが、例が多いといえる。実際に、解析学の専門家から見てもこのような級数も計算できるのかと感心させられることも多い。例を挙げよう。

$$(1) \frac{1}{3P_3} + \frac{x}{4P_3} + \cdots + \frac{x^n}{n+2P_3} + \cdots = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1-t^2}{1-xt} dt = \frac{3}{4x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{(1-x)^2}{2x^3} \log \frac{1}{1-x}$$

$$(2) \int \frac{2\sqrt{2}dx}{1+x^4} = \sin^{-1} \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^4}} + \sinh^{-1} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} + C$$

$$(3) 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \cdots = \frac{\pi + 2 \log(1 + \sqrt{2})}{4\sqrt{2}}$$

ここで、藤原氏の序言の言葉を借りて、本書の精神を垣間見ておこう。

研究の途上一つの問題に逢着して、これに要する定理あるいは公式を探す場合に、在来何れの書よりもあるという程度より少し進んだものになると、これを見出すにかなりの時間と労力を途費することが多い。

このことからわかるように研究者に向けたメッセージが伝わってくる。先ほどの例もそのような研究者向けのメッセージの一環ととらえられる。その一方で、これらの例も大学生の初年度の学生でもきちんと考えれば結論に至りつくように構成されていることは驚嘆に値する。

高校のときに1変数の微分積分学を習うが、大学に入ると変数が増える。偏微分、反復積分がその典型である。本書の優れているところは n 変数を扱うわけではなく、2変数を扱っているところである。「一変数関数の理論において現れなかった新現象」と本書の著者が評しているが、1変数と2変数では微分の世界だけ見てもまったく違うといっていっくらいに見えるものが違う。実際に、 ε - δ 論法をやるとその事情がはっきりすると思う。つまり、1変数関数の世界である1次元では近傍とは区間と置き換えられるのに対して、2変数関数の世界である2次元では近傍とは自然な拡張である長方形が標準というわけではなく、いろいろな図形が近傍として考えられることに起因していると思われる。多変数の微分積分学はあらゆる自然科学の基本であるが、本書では2変数の微分積分学を通じて、多変数の微分積分学とはどのようなものかを概観できるようになっている。そのことの表れとして、反復積分を3回以上する状況が時々現れる。本書を読めば、多変数の微分積分学も2変数の微分積分学を通じて理解できるようになっている。

[1, 2] などの大著にすらないが、本書にある面白い内容として、分数回の微分と積分が挙げられる。一年生の微分積分を習ったことがある人はテーラー展開の剰余項が積分で

表されたことを思い出してみよう。その剰余項には階乗が現れるが、それを自然な形でガンマ関数で書き表すことによりまずは分数回の積分ができる。つまりは1.5回や $\sqrt{3}$ 回の積分ができるようになる。そして、例えば、 $-\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3}) - 2$ と考えることにより、 $\sqrt{3}$ 回の微分ができるようになる。

先ほど挙げたが、本書のもう一つの特徴として、参考文献が詳しいことが挙げられる。種々の計算例に対して、誰がいつ発見したのかがかなり詳しく書いてある。フビニの定理などを使い、演算順序を入れ替える計算技法が使えるようになると一つの計算でも実に多くの方法で計算ができるが、本書では、定理のみならず計算方法まで誰が最初に発見したのかを書いてある場合が多い。また、巻末には文献補遺として種々の内容を非常に詳しく並べてある。したがって、本書は初学者のみならず、指導者にも優れている書籍といえる。参考文献を詳細に書いても昔だと図書館に行っても見つからない文献ばかりであったが、現代ではインターネットが発達しているために、今ではいろいろな方法で文献を入手できる。多くの章末問題にこのような形で文献が明記されていることはわれわれが学生の頃とは違った大きな利点があると思われる。文献を探すのが困難ではなくなった現在、この藤原氏の先見の明「また何かの役に立つこともあるう」がついここ10年くらいになって正しくなった。

本書の優れた点として、問題点がどこにあるのかを明確にしていることである。多くのことを学ぶといろいろなことや問題点が自明のようになってくるが、実際に何も知らないところからやると自明なことは全くなく、すべて考えなくてはならない。本書ではそのような定理の形での結論として提示する以外に、どのようなことが考察の対象になるのかを明確にしている。

始めに述べたように本書はもともとは藤原松三郎氏の書籍であるが、浦川肇氏、高木泉氏、藤原毅夫氏の3氏によって現代風に編集されたものである。そのために、新旧対照表に相当する用語の比較集などが原著に加わった。原著に加わったもののうち、やはり編者による藤原氏の紹介は印象に残った。その紹介文の冒頭には、東北数学雑誌、現在の「Tohoku Mathematical Journal」を創刊するにあたり、林鶴一氏とともに私財を投じたと書かれている。そこまでの努力には頭が下がるばかりである。藤原氏は解析学を主に研究していたが、代数学、幾何学の研究もしていたようである。藤原氏のドイツ語で書いた論文なども含めて藤原氏の論文などはインターネットで見ることができる。また、先ほどの林鶴一氏の急逝を受け、数学史の発展に尽力するなど非常に多岐にわたり数学の研究をしていた。編者の言葉を借りれば、まさに「傑出」した数学者であった。

本書は新しく現代風に昔の良書を訳したといえるが、そのためか若干の誤植が残る。ただ、この現代風に直された書籍は[1, 2]と並んで例、歴史的な背景、数学的な厳密さに非常に富んでいるために名著になるであろう。改定の際には誤植が修正され、さらなる名著として学生そして教員を引っ張る書籍になることを期待する。

参考文献

- [1] 杉浦光夫, 解析入門, 東大出版会
- [2] 高木貞二, 解析概論, 岩波書店