書　評

フォン・ノイマン

—1. 知の巨人と数理の黎明，2. 量子力学の数学定式化へ，3. 疾風怒濤の時代—

廣島文生 著，現代数学社，2021 年

摂南大学理工学部
島田　伸一

『フォン・ノイマン』のタイトルのもとで，上記全 3 巻の本が，2021 年 4，6，9 月にそれぞれ出版された．ほぼ同時期にフォン・ノイマンについて，[T]，[N] が出版されている．後者は 1 巻の参考文献 [100] を文庫本化したものである．[T] の目的は，先行研究も皆無に等しい「フォン・ノイマンの哲学」に迫ること，と述べられている．それに対して本著者は，フォン・ノイマンの数学から体得した知識はその後の自分の研究の言語となったと述べ，その素晴らしいアイデアを共有したいことが執筆の動機としている．著者のフォン・ノイマンに対する敬愛は半端なく，関係する資料収集にのめり込み，月の裏側のフォン・ノイマンクレーターまで探し出している！（写真付きで）．このことが，本書の他書には見られない一番の魅力になっているのではないかと思われる．とにかく写真が多い．名前でしか覚えていない数学者・物理学者たちが目の前に現れてくるのは感動するし，彼らの楽しいエピソードも豊富に取り上げられているのでそれらを読むことも楽しい．ウリゾーンの写真も初めて見た．正規空間の交わらない閉集合を分離する連続関数の存在を保証するウリゾーンの補題のウリゾーンである．大家というイメージを持っていたのだが，写真は学生のように若い．ただこれは 26 歳で亡くなっているから，と聞くとなんとも言えない気持ちになったのだが．大半の素晴らしい写真は，残念ながら，サイズが小さい．評者のような老眼の読者の為に，再版の折には大きく載せて欲しいと希望する．著者はフォン・ノイマンの膨大な業績の中から，1920 年代後半に成し遂げた量子力学の数学的基礎付けを解説したいと述べる．その為に量子論の歴史，位相空間論の歴史をも概観しようとする．さらにはヒルベルト空間論は，ルベーグの測度論の発見なくしては一行も前に進まなかったとして，面積を計算する歴史をギリシア時代から始める．なんとも壮大な物語である．

　さて第 1 巻は，まずフォン・ノイマンの業績が大まかにまとめられ，その生涯が語られる．この辺りのさらに詳しい記述は，[N], [T] で読むことができる．1890-1930 年のハンガリーのギムナジウムの教育は，歴史上一番の実績を挙げていたという．[N] では，二

番目は日本の教育だそうである．それはともかく，ハール測度のハールまでが，フォン・ノイマンの家庭教師をしていたのには驚かされる．学校教育というより，英才教育の成果という気もする．早期教育・英才教育が，もちろん，いつもうまくいくとは限らない．あのディラックが無口なのは，小さい時からフランス語教師の父親からフランス語で会話することを強要され，それによると言われる兄の自死のためと後年告白しているそうである（3 巻参考文献 [89]）．またディラックは，ギムナジウムでフォン・ノイマンの一級年上のウィグナーの妹と結婚している．フォン・ノイマンが関わった公理的集合論・自動計算機・ゲームの理論についても結果のみではなく，例の計算も込めて説明している．しかしなんと言っても，1 巻の圧巻は第 II 部であろう．量子論の幕開けをガリレオ・ガリレイの木星の 4 個の衛星の観測から語り始める．光の歴史から前期量子論に続く．行列力学・波動力学を説明し，そのシュレディンガーによる同値性の証明を説明している．シュテファン・ボルツマンの法則は認めて使っているが，その他はかなりの部分を自前の計算で説明しており迫力がある．評者にはボーアの原子模型と対応原理の計算が興味深かった．但し，ハミルトン・ヤコビ方程式が何の説明もなく登場する等，もう少し物理の丁寧な説明が欲しいと感じた部分もあった．1 巻は，フォン・ノイマンの著書「量子力学の数学的基礎」の構成を説明し，その理解に必要なルベーグ積分の簡潔な説明で終わっている．

第 2 巻は位相空間の説明から始まり，ヒルベルト空間論・関数解析の初歩に進む．ハウスドルフ・ボレル・リース等が顔写真付きで登場し，ヒルベルト空間の命名について興味深い話が語られ，飽きさせない．関数解析については，ベールのカテゴリー定理も証明されており，その応用として一様有界性定理が示されている．残念ながら開写像定理・閉グラフ定理は証明されていないが，閉作用素の十分な説明がなされており，フォン・ノイマンによる自己共役拡張の理論も述べられている．その応用として区間 $(0,1)$ 上の運動量作用素 $-i(\frac{d}{dx})|_{C_0^\infty(0,1)}$ の全ての自己共役拡張が求められている．ソボレフ空間・シュワルツ超関数を使わずに境界値を定義したり，共役作用素の定義域を決めることの面倒さが実感できる．フォン・ノイマンは，ディラックのデルタ関数のような曖昧な物を排除して堅固な量子力学の基礎を作ったのだが，デルタ関数のような超関数を導入して量子力学の面倒な問題が解析できることも分かっている．時代の流れを感じさせる．そして 2 巻のハイライトが非有界自己共役作用素に対するスペクトル分解定理の証明である．これで量子力学の数学的定式化が完了したといわれる．それは物理量は非有界自己共役作用素に対応し，固有関数の完全系があることの数学的表現がスペクトル分解定理であるからである．なお超関数は 40 年程前，3 回生の解析学演義で初めて習い，スペク

トル分解定理の証明がレポート問題であったことを思い出した．さてもう一つのハイライトが，フォン・ノイマンによる行列力学と波動力学の同値性の証明である．生成・消滅作用素，エルミート関数の完全正規直交系を導入し交換子の計算をする．そして閉作用素の概念を利用する．これまで閉作用素は普通に使ってきたが，こういう議論をする為に定義されたのかと新鮮な驚きを得た．

第 3 巻では，ワイルの関係式を満たす作用素の組が本質的には運動量作用素と位置作用素の組しかないというフォン・ノイマンの一意性定理が示される．さらに自己共役作用素にヒルベルト・シュミットノルムが任意に小さい自己共役なヒルベルト・シュミット作用素の摂動で，点スペクトルしか持たないようにできるというワイル=フォン・ノイマンの定理を示している．日本語の本で証明まで書いてある本を評者は見たことがない．なお本書では有界な自己共役作用素に対して証明されているが，この有界という制限なしの証明が [TK] で読むことができる．このようにワイルとフォン・ノイマンは互いに影響し合って同時代を生きた偉大な数学者であるが，本書では二人の哲学を語ってはいない．[S] から引用しておく：「von Neumann は，抽象数学の彼方を見つめ続け，抽象数学の行きつく一つの道を，身をもって予言的に示しながらその生涯を終わったが，Weyl は，いわば，抽象数学の光を背に浴びながら，19 世紀数学から遠くギリシャの彼方を見つめながら，20 世紀前半の激動の中を，堂々と渉り切った．Weyl は抽象数学のよき理解者であったとしても，Weyl 自身抽象数学の流れの中に身をもって入って行ったとは思えない．」時代の流れを感じさせる．この後本書では息つく暇もなく，ディラックの輻射理論・エルゴード定理・観測の理論・量子論理・作用素環へと進んで行く．評者には，これらに対してコメントできる能力はない．さて第 3 巻の初めに戻ろう．フォン・ノイマンは大戦に翻弄され，核抑止派であった．原爆投下にも積極的に関わり，戦後は水爆の推進派でもあった，とある．原爆投下の候補地を書いたフォン・ノイマンのメモが残っている．最優先の候補地として kyoto の文字が読める（p.5）．[T] によれば，歴史的文化的価値が高く日本人の戦意を喪失させるには最適の場所であるからという理由である．なお東京が外れたのは，戦後の占領統治の為である．ではなぜ京都が外れたのか．ヘンリー・スチムソン陸軍長官が，それでは戦後，ローマやアテネを破壊したのと同じ非難を世界中から浴びることになるのが嫌で，強硬に反対したことによる．また長官が新婚旅行で京都を訪れていたことも一因かもとある．このマンハッタン計画は約 3 年間に総計 22 億ドル，21 名のノーベル賞学者を注ぎ込んだ一大国家プロジェクトであった．だから原爆製造に関する特許取得の機密文書を作成する必要があり，フォン・ノイマンと物理学者クラウス・フックスがその任に当たった．あろうことかこのフックスがソ連のスパイで

あったのだ．ソ連は 400 ドル余りの経費で原爆製造技術を手に入れ，その技術は瞬く間に世界に拡散した．フォン・ノイマンの意思決定理論の中には，ズルをする・人をダマスというファクターは，当たり前であるが，欠けていた．フォン・ノイマンについて書くことは，膨大な数学的な業績を理解整理する労力と共に，フォン・ノイマンの社会的行動に対する己の立ち位置を表明する強い意思が必要であることを強く感じた．筆の勢いで散見されるミスプリも含めて，評者はこの労作を皆様に推薦したい.

参考文献

[N] ノーマン・マクレイ：フォン・ノイマンの生涯, 渡辺 正 芦田みどり 訳, 筑摩書房 (2021)

[S] 志賀浩二：雑感-20 世紀前半の数学について-岩波講座基礎数学月報 7, 岩波書店 (1976)

[T] 高橋昌一郎：フォン・ノイマン-人間のフリをした悪魔-, 講談社現代新書 (2021)

[TK] T.Kato：Perturbation Theory for Linear Operators, Springer (1976)