

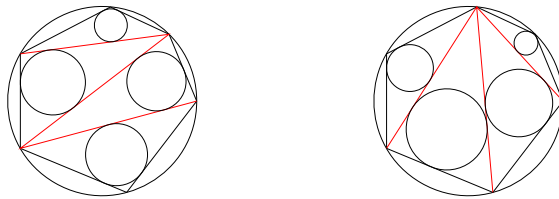
Japanese Theorem とカタラン数*

城西大学数理・データサイエンスセンター
大島 利雄

1 Japanese Theorem

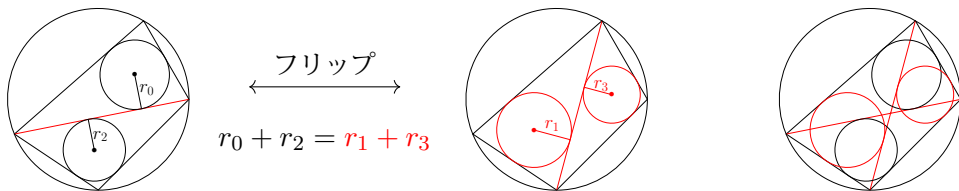
COVID-19 の流行が始まって 3 年あまりですが、私は都心でなくて人混みを避けた埼玉方面に散歩に行くことが多くなりました。その際に立ち寄った神社にあった算額に興味を惹かれ、算額についての解説本を読んでいたら、以下のような美しい定理が目にとまり、定理の名前にも興味を持ちました。

定理 1 (Japanese Theorem). 円に内接する多角形を描く。頂点を結ぶ交差のない対角線を適当に用いて多角形を三角形に分割したとき、そのすべての内接円の半径の和は分割の仕方によらない。



東北地方の鶴岡山王社という神社に 1800 年に奉納された算額に四角形の場合が書かれており、奉納した人の名前を取って四角形の場合は丸山良寛の定理と呼ばれています。

定理 2 (丸山良寛 [1]). Japanese Theorem は円に内接する四角形の場合に正しい。

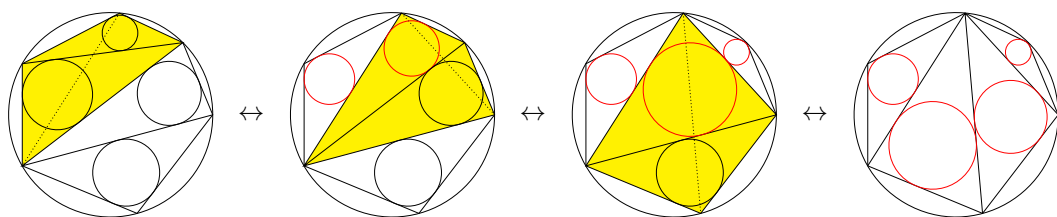


実際の算額には上の右端のように円に内接する四角形と 2 本の対角線と三角形に内接する四円が描かれ、南円、東円、西円の半径がそれぞれ一寸、二寸、三寸のとき、北円の半

*2023 年度年会市民講演会 (2023 年 3 月 18 日)

径を問うものでした。この算額は現存しておりませんが、全国の神社仏閣に奉納された算額を収録した藤田嘉言編『続神壁算法』[1]に解説されていて、そこには $r_0 + r_2 = r_1 + r_3$ を使って求められることが記されています。Japanese Theorem という定理名との関連についても上垣渉 [4] に詳しく調べられています。

凸四角形の三角形分割は、2本の対角線のどちらで分割するかで2通りあり、それを取り替える操作を「フリップ」と呼ぶことにします。最初に描いた六角形の2つの三角形分割の例では、分割で現れる適当な四角形でのフリップを以下のように行っていくことより、2種類の三角形分割が複数回のフリップで移りあうことが分かります。



各段階で丸山良寛の定理を使えば、内接円の半径の和はフリップによって分割を変えても変化しないことが分かります。よって、以下の定理から、Japanese Theorem は丸山良寛の定理に帰着されることが分かります。

定理 3. 凸多角形の対角線による三角形分割は、何度かの四角形のフリップ操作で互いに移り合う。

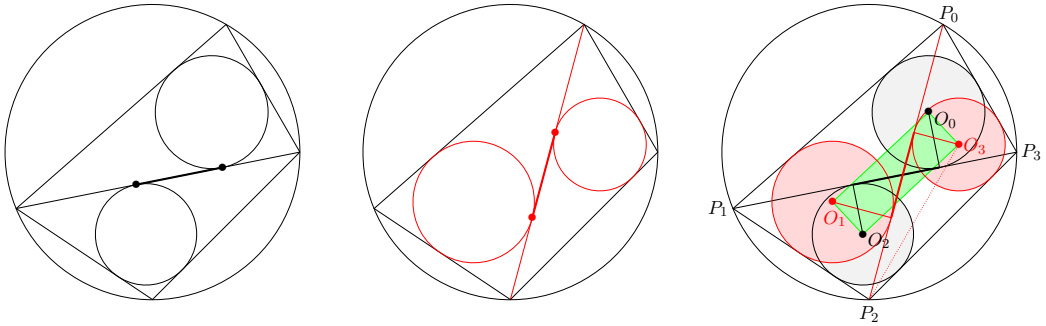
証明. 凸 n 多角形において、その頂点の一つを P とし、 P を端点とする $n - 3$ 本の対角線を用いた三角形分割を基準の三角形分割としましょう。これと異なる三角形分割には、 P を端点とする対角線で三角形分割に使われていないものがあります。このとき分割された三角形で P を頂点として底辺がその対角線と交わるものが定まるので、その底辺を対角線とする四角形が決まります。その四角形でのフリップで移った三角形分割を考えると、三角形分割に用いられる P を端点とした三角形の本数が1本増えることが分かります（先の例では、最上部の頂点を P と考えればよい）。この操作を続けると基準の三角形分割に移すことができ、逆の操作も可能です。基準の三角形分割を経由することにより、定理のフリップ操作が具体的に構成できます。

凸 n 多角形の対角線による三角形分割には、 $n - 3$ 本の対角線が用いられて $n - 2$ 個の三角形に分割されることが、この定理から分かります。また、 P を適当に選べば、定理のフリップ操作は、ただだか $2(n - 3) - 1 = 2n - 7$ 回で足りることも分かります。

2 丸山良寛の定理の証明

丸山良寛の定理の証明は易しくはないのですが、以下にあるようないくつかの異なる証明 1~7 が知られています。

それを見ると、平面幾何のいろいろな定理と関係していることに驚かされます。



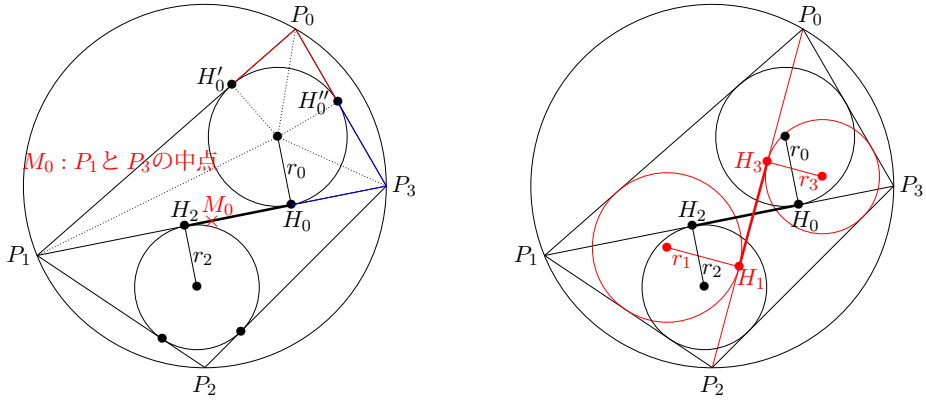
1. 対角線上の接点間の距離が等しいことを用いる（上の図）
2. 内接円の中心は長方形の頂点となること（さらに、チャップルの定理など）を用いる（上の右の図）
3. カルノーの定理（三角形の外心から各辺に下ろした垂線の長さ、外接円と内接円の半径の間の関係式）を使う
4. 内接円の半径の差を使う
5. 三角関数の等式（和公式など）を用いる
6. Thébault の定理を用いる（ \Leftarrow 拡張版トレミーの定理を用いて示せる）
7. 複素数平面で考える

このうちの 1~5 は上垣 [4]（および [7]）で歴史的背景も含めて解説されています。6 は Reyes [5] に、7 は大島 [10] にあります。

なお、大島 [9] では、1~6 の証明を解説し、丸山良寛の定理の拡張やそのほか関連する話題を教材として活用するための問題などを作ってまとめました。興味のある方はご参照ください。

丸山良寛の定理の証明は、それを使った算額やそれを記録した [1] には記されていません。和算家吉田為幸（1819–1892）の『続壁算法附録解』には 1 を用いる証明が描かれているので、それを以下に紹介しましょう。

証明. 円に内接する四角形の頂点を反時計回りに順に P_0, P_1, P_2, P_3 とおく. 四角形の頂点を挟む二辺と対角線からできる三角形の内接円を頂点と同じ番号をつけて O_0, O_1, O_2, O_3 とし, その半径を r_0, r_1, r_2, r_3 , 内接円と底辺との接点を H_0, H_1, H_2, H_3 としよう.



内接円 O_0 が, 辺 P_0P_1, P_0P_3 と接する点を H_0', H_0'' とおこう. $P_0H_0' = P_0H_0''$ などとなりたつことから

$$\begin{aligned} P_0P_1 - P_3P_0 &= P_0H_0' + P_1H_0' - (P_0H_0'' + P_3H_0'') \\ &= P_1H_0 - P_3H_0 \end{aligned}$$

となります. P_0 を P_2 に変える (添え字 0 を 2 に変える) と

$$P_0P_1 - P_3P_0 + P_2P_3 - P_1P_2 = P_1H_0 - P_3H_0 + P_3H_2 - P_1H_2 = \pm 2(H_0H_2)$$

が分かります. もう一つの三角形分割で同様に考えると

$$P_0P_1 - P_1P_2 + P_2P_3 - P_3P_0 = P_0H_1 - P_2H_1 + P_2H_3 - P_0H_3 = \pm 2(H_1H_3)$$

となるので

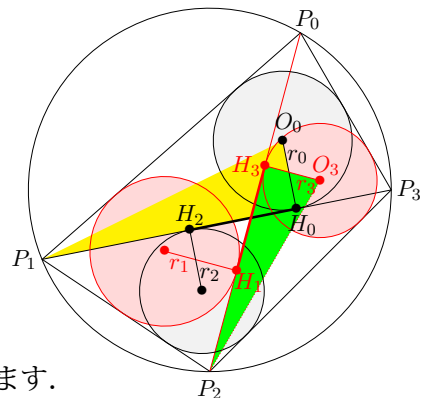
$$H_0H_2 = H_1H_3$$

が分かります.

内接円の中心に各円と同じ記号を用いましょう.

$$\begin{aligned} \angle O_0P_1H_0 &= \frac{1}{2}\angle P_0P_1P_3 = \frac{1}{2}\angle P_0P_2P_3 \\ &= \angle O_3P_2H_3 \end{aligned}$$

が, 弦 P_0P_3 に対する円周角の定理などから分かります.



よって、次のように2つの直角三角形

$$\triangle O_0P_1H_0 \sim \triangle O_3P_2H_3$$

が相似となり、相似比から

$$\frac{r_0}{r_3} = \frac{O_0H_0}{O_3H_3} = \frac{P_1H_0}{P_2H_3}$$

となって、以下の関係式が得られます。

$$\begin{cases} r_0P_2H_3 = r_3P_1H_0, \\ r_1P_3H_0 = r_0P_2H_1, \\ r_2P_0H_1 = r_1P_3H_2, \\ r_3P_1H_2 = r_2P_0H_3. \end{cases}$$

この2番目以降は、添え字を1増やすことで順に得られます（添え字が4以上になった場合は、4で割った余りの添え字に変えます）。これらから

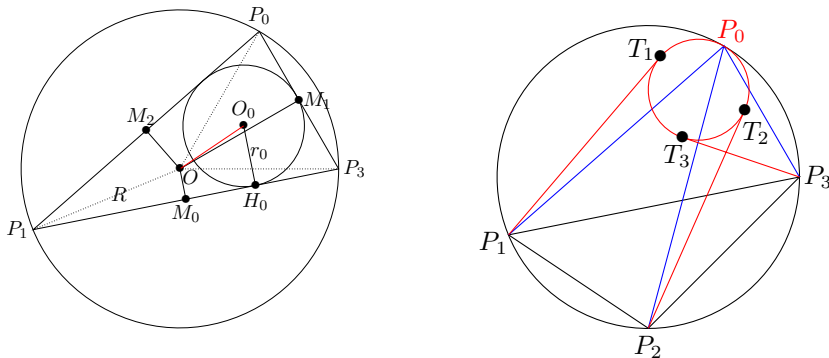
$$\begin{aligned} r_0(P_2H_3 - P_2H_1) + r_2(P_0H_1 - P_0H_3) &= r_1(P_3H_2 - P_3H_0) + r_3(P_1H_0 - P_1H_2), \\ (r_0 + r_2)H_1H_3 &= (r_1 + r_3)H_0H_2 \end{aligned}$$

となりますが、 $H_0H_2 = H_1H_3$ を使うと、 $r_0 + r_2 = r_1 + r_3$ が分かります。

注意 4. (1) $H_0 = H_2$ の場合でも、たとえば次のように考えれば分かります。 $(r_0 + r_2) - (r_1 + r_3)$ の値は、 P_0 を円周上で少しでも動かすと $H_0 \neq H_2$ となるので、そのときの値は0です。 P_0 を動かすと値は連続に変化しますので、 $H_0 = H_2$ でも値は0です。

(2) $H_1H_3 = H_0H_2$ は、円に内接するとは限らない四角形でもなり立ちます。

証明の2~3, 5 で使われる平面幾何の定理を見てみましょう。



外接円の中心を O 、半径を R 、辺 P_1P_3 , P_3P_0 , P_0P_1 の中点を M_0 , M_1 , M_2 とし、 $h_i = OM_i$ ($i = 0, 1, 2$) とおきます。このとき平面幾何で知られた関係式

定理 5 (チャップル). $OO_o^2 = R^2 - 2Rr_o$.

定理 6 (カルノー). $R + r_o = \begin{cases} h_0 + h_1 + h_2 - 2h_i & (\overline{OM_i} \text{が三角形外}), \\ h_0 + h_1 + h_2 & (O \text{が三角形内}). \end{cases}$

があります. それぞれ 2 や 3 の証明で用いられますが, 以下の Thébault の定理を使う証明も合わせて, 大島 [9] による解説があります.

円に内接する四角形に対して

定理 7 (トレミー (プトレマイオス)). $P_0P_1 \cdot P_2P_3 + P_1P_2 \cdot P_3P_0 = P_0P_2 \cdot P_1P_3$

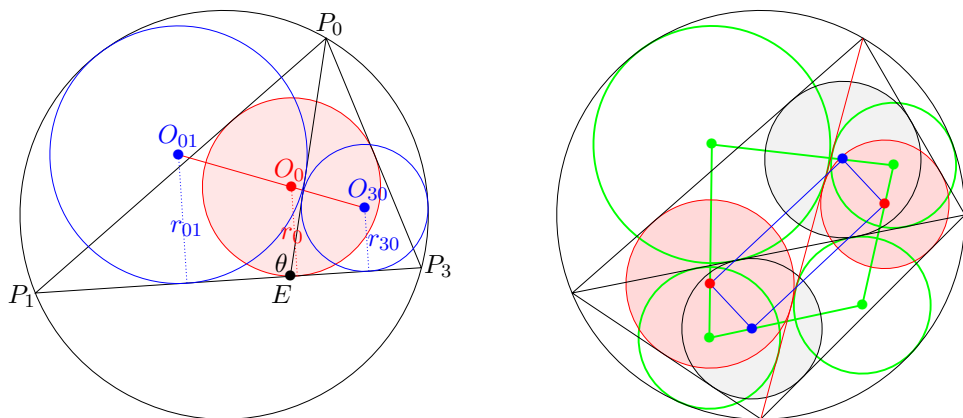
がよく知られています. この定理は三角関数の和公式と同等の重要な公式です. 四角形の頂点を円に内接 (または外接) する小円で置き換え, 頂点を結ぶ線分を円の接線の長さで置き換えても同様の結果が成立します.

たとえば, 円に内接する四角形の頂点 P_0 で, この外接円に内接する小円を描き, 3 頂点 P_1, P_2, P_3 からこの小円に引いた接線の接点を T_1, T_2, T_3 とおくと

定理 8 (Cassey, 拡張版トレミー). $T_1P_1 \cdot P_2P_3 + P_1P_2 \cdot P_3T_3 = T_2P_2 \cdot P_1P_3$

となります (cf. 田村 [3], 大島 [9]). 小円が一点に縮退したときがトレミーの定理です. この拡張版トレミーの定理を使って Gueron[6] は Thébault の定理の証明を与えましたが, Reyes[5] は丸山良寛の定理が Thébault の定理から容易に導かれることを指摘しています (次節の最初の右の図参照).

3 Thébault の定理



三角形 $P_0P_1P_3$ の底辺 P_1P_3 上に点 E を取ります. 三角形の内接円の中心を O_0 とおき, 三角形の底辺と線分 P_0E と外接円との3つに接する2つの円の中心を, 図のように O_{01}, O_{30} とおきます. 各円の半径を r_0, r_{01}, r_{30} とし, $\theta = \angle P_0EP_1$ とおくと

定理 9 (Sawayama–Thébault). O_0 は線分 $O_{01}O_{30}$ 上にあって

$$r_0 = r_{01} \cos^2 \frac{\theta}{2} + r_{30} \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

丸山良寛の定理にある他の3つの三角形に対してこの定理を適用すると, 添字を1つずらしていくことにより

$$r_1 = r_{12} \sin^2 \frac{\theta}{2} + r_{01} \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

$$r_2 = r_{23} \cos^2 \frac{\theta}{2} + r_{12} \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

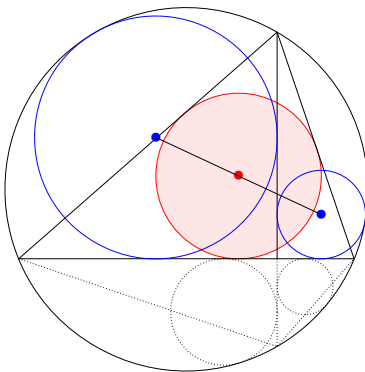
$$r_3 = r_{30} \sin^2 \frac{\theta}{2} + r_{23} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

という式が得られ, 丸山良寛の定理が得られことが分かります.

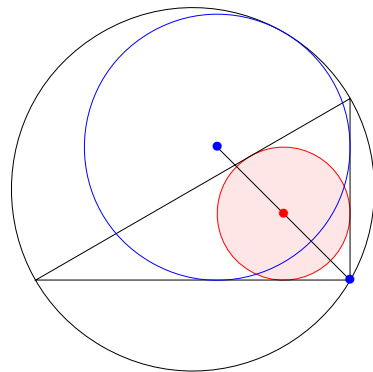
この定理は Thébault の定理と呼ばれますが, 証明が易しくないことで知られています. 実際, 1938年に Thébault が述べた結果においては, 上の式が間違っていたそうです. Streefkerk (1973) が証明を与えたが, オランダ語であったためあまり知られず, Taylor (1984) は24ページの証明を与えたとのこと. その後 Voldkamp (1989) などの証明によって知られるようになったそうです.

一方, 日本の Sawayama[2] (1905) が証明を与えていたことが発見され, Shail (2001), Ayme (2003), Čelin (2011), Dao (2016) etc. など関連する文献が多く存在します.

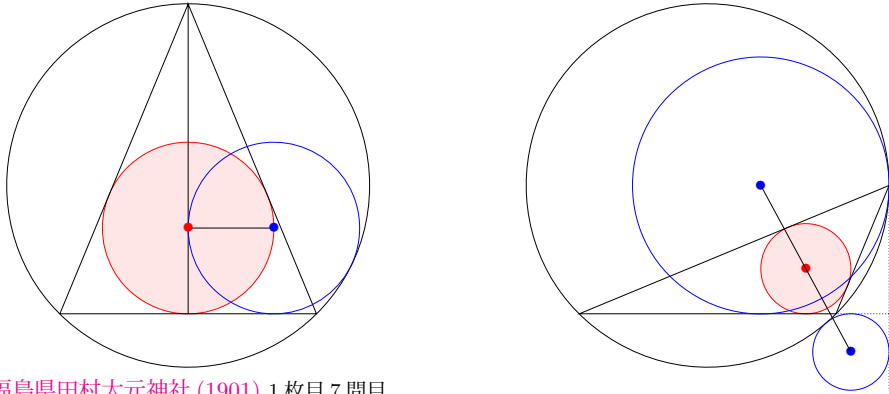
P_0E が三角形の底辺に垂直な場合の Thébault の定理は, 以下のように算額に何度か取り上げられているようです (O_0 は線分 $O_{01}O_{30}$ の中点になる).



福島県田村大元神社 (1901) 2枚目5問目



大船渡市根城八幡宮 (1941)



福島県田村大元神社 (1901) 1枚目7問目

上の最後の図は、 E が底辺の延長線上になった場合にあたり、このときも同様のことがなりたちます。丸山良寛の定理も、円周上の4点が順に並んでいない場合や、内接円ではなくて傍接円の場合などに拡張できます（大島 [10] などを参照してください）。

4 複素数平面

大島 [10] にあるように、複素数を使った丸山良寛の定理の証明も可能です。

三辺の長さが a, b, c の三角形の面積を S , 内接円の半径を r とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \sqrt{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)} \quad (\text{Heron の公式}) \\ &= \frac{1}{2} (a+b+c)r \end{aligned}$$

となるので

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{a+b+c}}$$

が分かります。

単位円に内接する四角形の頂点 P_j ($0 \leq j \leq 3$) は

$$P_j = z_j^2 \quad (|z_j| = 1, 0 \leq \arg z_0 < \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < \pi)$$

とおくことができます。このとき、偏角に注意すると

$$P_i P_j = |z_i^2 - z_j^2| = \sqrt{(z_i^2 - z_j^2) \left(\frac{1}{z_i^2} - \frac{1}{z_j^2} \right)} = \frac{z_i^2 - z_j^2}{\sqrt{-1} z_i z_j} \quad (0 \leq i < j \leq 3)$$

が分かります。

z_i^2, z_j^2, z_k^2 を 3 頂点とする三角形の内接円の半径を $r(z_i, z_j, z_k)$ とおくと、それはこれらを使って計算できて

$$r(z_0, z_1, z_2) = \frac{(z_2 + z_0)(z_1 - z_0)(z_2 - z_1)}{-2z_0z_1z_2}$$

となることが分かります。添え字 2 を 3 に変えたものとの差を計算すると

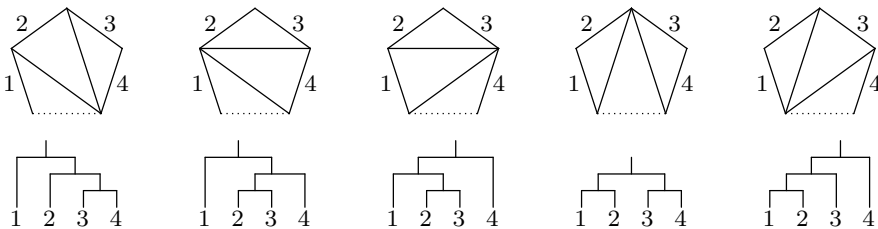
$$r(z_0, z_1, z_3) - r(z_0, z_1, z_2) = \frac{(z_1 - z_0)(z_3 - z_2)(z_0z_1 + z_2z_3)}{-2z_0z_1z_2z_3}$$

となり、 $r(z_0, z_2, z_3) - r(z_1, z_2, z_3)$ も同様に計算されて同じ値となります。

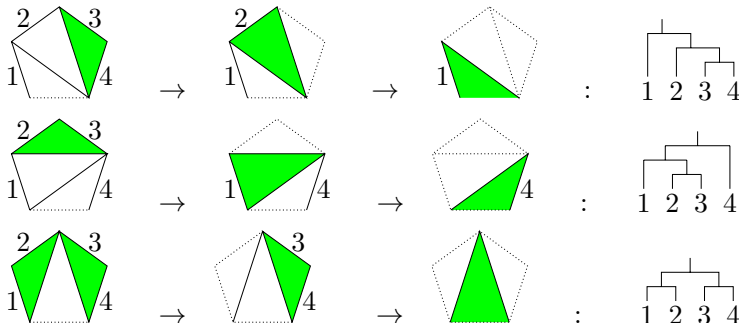
5 凸多角形の三角形分割とトーナメント戦

凸多角形の三角形分割は、フリップという操作によって互いに移り合うことをみました。ここでは、この三角形分割の図とトーナメント戦の図とが対応することをみてみましょう（以下は、7 節を除いて大島 [8] に、より詳しい解説があります）。

凸多角形の一つの辺を選んで、そこを 0 として各辺に順に番号をつけます。凸五角形の場合を考えてみましょう。番号 0 の辺を除くと、そのほかの辺に 1 から 4 までの番号がつけられます。



1 から 4 の番号をつけた 4 チームに対し、その番号が三角形分割の 2 辺になっていたら対戦し、試合後に 2 辺を消して残りの辺に勝ったチームの番号をつけると、各辺に残ったチームの番号がつけられた凸多角形ができます。これを続けることにより、トーナメント戦が定まります。



このようにして、凸 $n+2$ 角形の三角形分割と $n+1$ チームのトーナメント戦とが対応します。凸 $n+2$ 角形の三角形分割の種類の数と $n+1$ チームのトーナメント表の種類の数とは等しくなりますが、この数をカタラン数といって、 C_n と書きます。たとえば、凸五角形の三角形分割は $C_3 = 5$ 種類あります。

なお、ここでは正多角形の三角形分割でも、回転や裏返しで移っても同一視をせずに数えています。

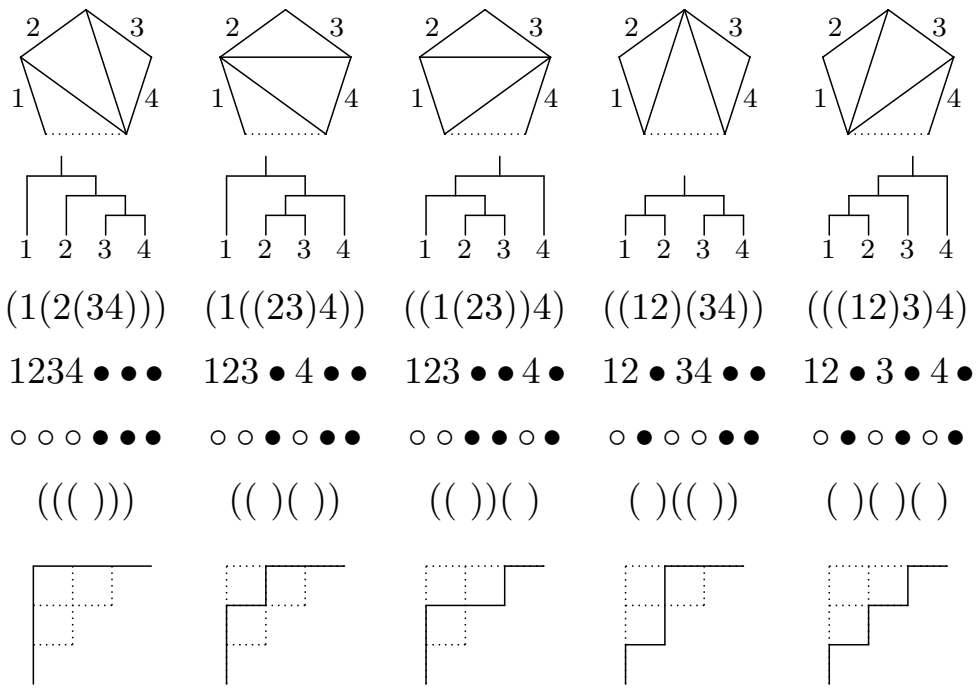
6 凸 $n+2$ 多角形の三角形分割とカタラン数

場合の数がカタラン数で表せるものは数多くあります。たとえば、以下の $n=3$ の場合の図示から分かるように

- $n+1$ チームのトーナメント戦
- $n+1$ 個の行列の積 $A_1 \cdots A_n$ の計算順序
- n 組の括弧の組み合わせ
- $(0, -n)$ から $(n, 0)$ への制限付き格子経路

がその例です。

3 行目は、4 チームのトーナメント戦の図を括弧を使って表したのですが、行列 A_1, \dots, A_4 の積 $A_1 A_2 A_3 A_4$ の積を計算する順序を表している、とみることができます。



4チームのトーナメント戦を行うとき、番号1のチームから順に呼び出して試合を行うことにして、呼び出されたチームで対戦ができるときは、次のチームを呼び出す前に試合をする、という手順を先頭から順に表したものが4行目の図です。番号は呼び出すチームを、●は試合を表しています。

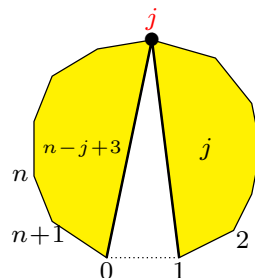
4行目の図の番号1を削り、その他の番号を○で置き換えたものが5行目の図です。この図から4行目の図が復元できることは容易に分かります。また、○を「(」で、●を「)」で書いたものが5行目です。

なお、 n 組の括弧の組み合わせとは、 n 個の「(」と n 個の「)」とを横に並べたもので、先頭から途中までを考えたときに、そこまでの「)」の個数が「(」の個数を超えない、という条件を満たすもののことです。

座標平面を考えて、○は y 座標を1増やし、●は x 座標を1増やす移動に対応させると、 $(0, -n)$ を出発して $(0, n)$ に至る道が7行目のように定まります。この道は、「 $(0, -n)$ と $(0, n)$ を結ぶ線分と x 軸、 y 軸とで囲まれてできる三角形の外部に出ることがない」という道で各ステップは右または上に1ずつ移動する、という $2n$ ステップの道になります。

次に、 C_n の満たす漸化式を求めましょう。凸 $n+2$ 角形の頂点に、反時計回りに0から $n+1$ までの番号をつけます。三角形分割に対して、番号が最小の2つの頂点0と1を結ぶ線分を底辺とするとする三角形の頂点の番号 j が定まります。 j は2以上 $n+1$ 以下の値を取るので、この j の値で凸 $n+2$ 角形の三角形分割は n 通りに分類できます。

j の値を定めたときの三角形分割は、 $\{1, \dots, j\}$ を頂点とする凸 j 多角形の三角形分割と $\{0, j, \dots, n+1\}$ を頂点とする凸 $n-j+3$ 角形の三角形分割で分類できるので、その場合の数は $C_{j-2} \times C_{n-j+1}$ 通りになります。このことから次の漸化式が得られます。

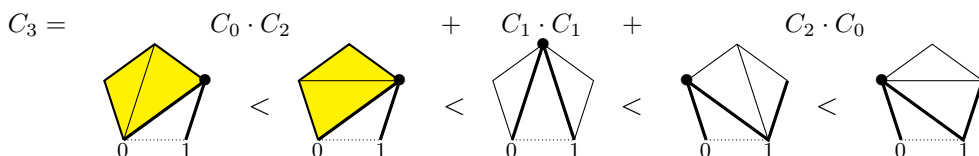


$$C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \dots + C_{n-1} \cdot C_0 \quad (n \geq 1, C_0 = 1)$$

三角形分割の順序づけ: 凸 $n+2$ 角形の三角形分割を分類して一列に並べることを考えてみましょう。上の j が小さいものは先にもってきます。 j の値が同じ場合は、凸 j 角形の方の順序に従い、それが同じ場合は凸 $n-j+3$ 角形側の順序で並べます。頂点には番号がついているので、最小の番号の辺を基準とした上のような分類が帰納的にできて、凸 $n+2$ 角形の三角形分割を一列に並べることができます（整列順序集合となる）。

凸 $n+2$ 角形の三角形分割は、頂点0と1の間に頂点を一つ書き加えて、0以外の番号をずらすと、凸 $n+3$ 角形の三角形分割の最初の部分（ $j=2$ に対応）に埋め込めます。

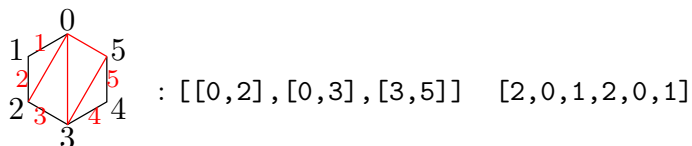
このようにすると、凸多角形の全ての三角形分割に番号がつけられます。すなわち、 m 番目の三角形分割は、 $m \leq C_{n-2}$ を満たす凸 n 角形で（基準の頂点 0 を決めて）実現されることになります。



7 コンピュータでの表現

凸 n 角形の三角形分割やそれに対応するものをコンピュータで扱うことを考えましょう。

1. 三角形分割の m 番目のもの ($1 \leq m \leq C_{n-2}$)
2. 対角線を頂点 $\{0, \dots, n-1\}$ の 2 元の組で表し、その $n-3$ 組のリスト（表記は、コンピュータに定義されている順序で最小のものにとる）。



3. 各頂点を通る対角線の本数を並べたリスト（上の $[2,0,1,2,0,1]$ ）
4. トーナメント表： $(((**))* (**))$ $(((\mathbf{12})\mathbf{3})(\mathbf{45}))$
5. $m = n - 2$ 次の許容 01 列：すなわち、 m 個の 0 と 1 を並べた列で、先頭から見て 0 の個数が 1 を下回らないもの： 01010011 $\circ \bullet \bullet \circ \circ \bullet \bullet$

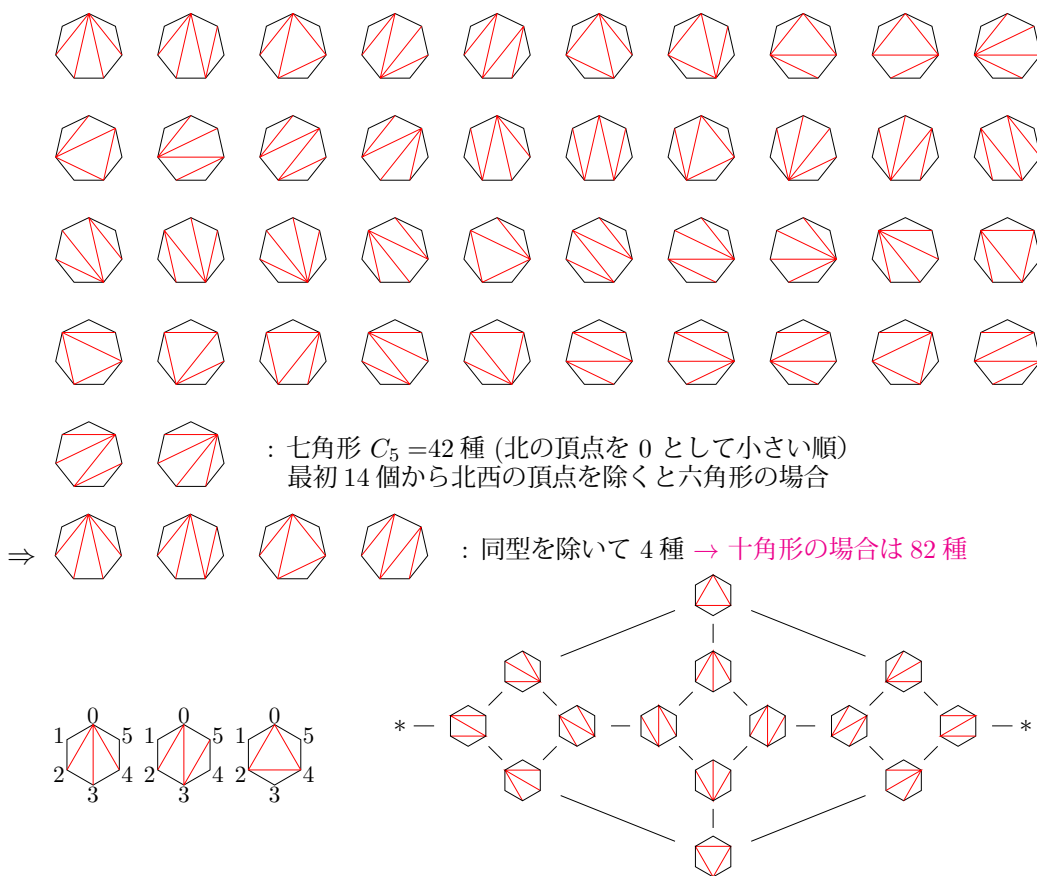
大島 [11] において、以下の変換や出力がコンピュータ上で実現されています。

- 上の表記 1~5 の相互変換
- 三角形分割に対する操作：回転，裏返し，フリップ，拡大（隣り合った辺の間に頂点を入れる），縮小（分割されていない頂角の頂点を削る）
- （回転や裏返しなどで移る分割を同一視した）三角形分割の表
- 多角形の三角形分割を含む表や図式の（ $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ のための見やすい） TikZ のソース

凸多角形の三角形分割に自然な大小関係が定義されることは、コンピュータでそれを扱う上でとても有益です。三角形分割の分類は自然数に対応し、表記1と2の変換や上の最後の項によって図示された形になります。凸100角形の 10^{50} 番目の分割を得るのもコンピュータでは瞬時です（全分割の表を作ることは非現実的ですが）。

また、正多角形の場合に合同変換で同一視した三角形分割の表を作るには、最小の代表元を選び出せばよいので、回転や裏返しでより小さくなることがあるものを除けばよいことになります。三角形分割を順に得て、既に選んだものに合同変換で一致するものがないかどうか調べる、というような表の作成法は n が大きい場合は非効率です。

大島 [11] では、たとえば以下のような表や図が PDF で（1秒ほどで）出力できます。



8 カタラン数の母関数

カタラン数の母関数とは

$$u(x) := C_0 + C_1x + \cdots + C_nx^n + \cdots$$

で定まる形式べき級数です。形式べき級数では、和や積などの演算ができます。

$$\begin{aligned} u^2 &= (C_0 + C_1x + \cdots + C_nx^n + \cdots)(C_0 + C_1x + \cdots + C_nx^n + \cdots) \\ &= C_0C_0 + (C_0C_1 + C_1C_0)x + \cdots + (C_0C_n + \cdots + C_nC_0)x^n + \cdots \\ &= C_1 + C_2x + \cdots + C_{n+1}x^n + \cdots \quad (\leftarrow C_n \text{ の漸化式より}), \\ u - xu^2 &= C_0 = 1. \end{aligned}$$

よって $(1 - 2xu)^2 = 1 - 4xu + 4x^2u^2 = 1 - 4x(u - xu^2) = 1 - 4x$ となるので

$$2xu = 1 - \sqrt{1 - 4x}.$$

なお、定数項が1で2乗すると $1 - 4x$ となる形式べき級数を $\sqrt{1 - 4x}$ と表します。

定理 10. 実数 a に対して、2項係数を $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$ とおくと、形式べき級数 $u_a(x) = 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \cdots + \binom{a}{n}x^n + \cdots$ は、次式を満たす。

$$u_a(x)u_b(x) = u_{a+b}(x).$$

両辺の x^n の係数を比較して等しいことを示せばよいのですが、それらはどちらも2変数 a と b の n 次の多項式であって、 a と b が共に自然数のときは通常の2項定理になってそれらの値が等しいので、同じ多項式となることがわかります。

この定理から

$$\begin{aligned} (1 - 4x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}(-4x) + \cdots + \binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-4x)^{n+1} + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{1!}(-4x) + \cdots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n)}{(n+1)!}(-4x)^{n+1} + \cdots \\ &= 1 - \cdots - \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(n+1)!} 2^{n+1} x^{n+1} - \cdots \\ &= 1 - \cdots - \frac{2(2n)!}{(n+1)!n!} x^{n+1} - \cdots \end{aligned}$$

となって

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{2n C_n}{n+1}$$

が得られます。特に

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{(2n)(2n-1)}{(n+1)n} = \frac{4n-2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4$$

となります。実際の値は次のようになります。

| | | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|----|----|-----|-----|------|------|-------|-------|--------|
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| C_n | 1 | 1 | 2 | 5 | 14 | 42 | 132 | 429 | 1430 | 4862 | 16796 | 58786 | 208012 |

9 ランダムウォーク

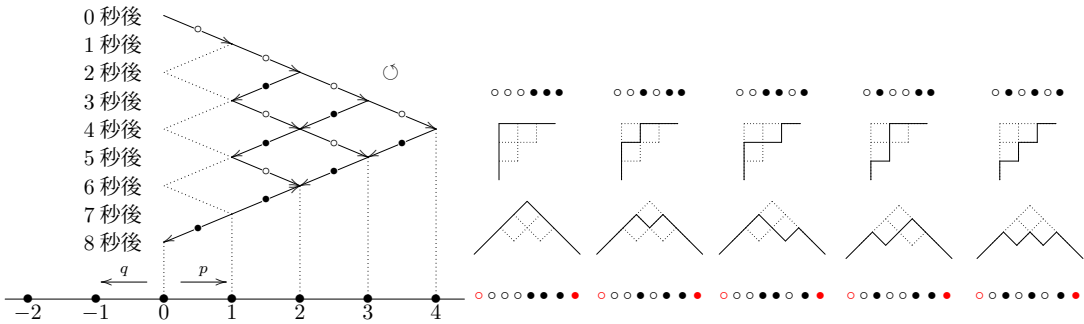
原点を出発し、数直線上を1秒ごとに正または負方向に1動く点を考えよう。

2秒後の位置は（正を○、負を●で表して）、○○, ○●, ●○, ●●の4通りあるので

位置は2, 0, 0, -2（○●⇒位置の変化は0 $\xrightarrow{+1}$ 1 $\xrightarrow{-1}$ 0となります）。

4通りのうちの2通りは原点に戻ります（50%）。

8秒後に初めて原点に戻ってくる動き方は？（最初に正方向に動く動き方のみの図示）：



全 $2^8 = 256$ 通り中の $2 \times C_3 = 10$ 通り（約4%）。

$2n$ 秒後に初めて原点に戻ってくるのは、 2^{2n} 通り中の $2 \times C_{n-1}$ 通り。

毎秒独立に、正方向に確率 p 、負方向に確率 q で動くとしよう（ $p + q = 1$ ）。

$p = 1$ ならば出発点に戻ってくる確率は0であるが、 $p = q = \frac{1}{2}$ ならば最も原点に戻ってきやすいであろう。その確率を求めましょう。

$2n$ 秒後に初めて戻ってくる確率： $2C_{n-1}p^nq^n$ 。

$2N$ 秒後までに戻ってくる確率は

$$P(N) = \sum_{n=1}^N 2C_{n-1}(pq)^n$$

となります。さらに

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P(N) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2C_{n-1}(pq)^n = 2pq \sum_{m=0}^{\infty} C_m(pq)^m \\ &= 2pq \frac{1 - \sqrt{1 - 4pq}}{2pq} = 1 - \sqrt{(p+q)^2 - 4pq} \\ &= 1 - |p - q| \end{aligned}$$

が分かります。表にした結果は次のようです。

直線上のランダムウォークで出発点への回帰が起こる確率

| $p \setminus 2N$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 20 | 100 | 1000 | 10000 | ∞ |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|
| $\frac{1}{2}$ | 0.5 | 0.625 | 0.687 | 0.726 | 0.753 | 0.823 | 0.920 | 0.974 | 0.992 | 1 |
| $\frac{1}{3}$ | 0.444 | 0.543 | 0.587 | 0.611 | 0.626 | 0.655 | 0.666 | 0.666 | 0.666 | $\frac{2}{3}$ |
| $\frac{1}{4}$ | 0.375 | 0.445 | 0.471 | 0.484 | 0.490 | 0.498 | 0.499 | 0.499 | 0.499 | 0.5 |

参考文献

- [1] 藤田嘉言編, 続神壁算法, 1807.
- [2] Y. Sawayama, A new geometrical proposition, Amer. Math. Monthly **12**(1905), 222–224.
- [3] 田村三郎, John Cassey について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1130**(2000), 8–10.
- [4] 上垣渉, Japanese Theorem の起源と歴史, 三重大学教育学部研究紀要 **52**(2001), 23–45.
- [5] W. Reyes, An application of Thébault’s theorem, Forum Geometricorum **2**(2002), 183–185.
- [6] S. Gueron, Two applications of generalized Ptolemy theorem, Amer. Math. Monthly **109**(2002), 362–370.
- [7] A. Ahuja, W. Uegaki and K. Matsushita, Japanese Theorem : A little known theorem with many proofs, PART I, II, Missouri Journal of Mathematical Sciences **16**(2004), 72–80, 149–158.
- [8] 大島利雄, 個数を数える, 数学書房, 2019.
- [9] 大島利雄, Japanese Theorem について, 城西大学数学科数学教育紀要 **3**(2021), 70–92, <https://libir.josai.ac.jp/contents/josai/kiyou/MathKyoiku/MathKyoiku.htm>.
- [10] 大島利雄, 複素平面での Japanese Theorem, 城西大学数学科数学教育紀要 **4**(2022), 1–2.
- [11] 大島利雄, os_muldif.rr, 数式処理言語 Risa/Asir のライブラリ, 2008–2023, <https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima>.
- [12] 小寺裕, 和算の館, <http://www.wasan.jp/>.