フラクタルと力学系の安定性

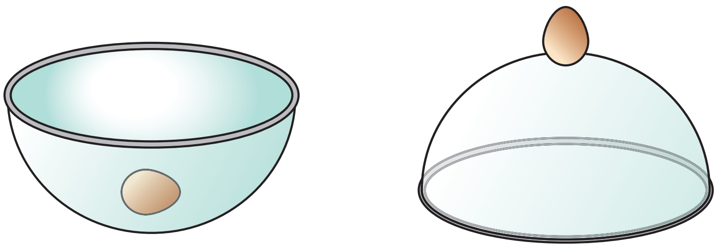
一橋大学大学院経済学研究科
川平　友規

はじめに

本稿は 2023 年 3 月 18 日に中央大学で行われた日本数学会年会のイベント，「市民講演会」の講演録です．講演を細部まで再現したものではありませんが，雰囲気や趣旨は伝わるよう文章化してみました．

1　安定？ 不安定？

「台所のボウルに卵置いといたから，料理しておいて！」といわれたとします．その卵は，どんなふうに置かれていたか：



普通は左のような置き方を想像しますが，右のような可能性もあります．「コロンブスの卵」という言葉がありますが，卵というものは頑張って時間をかければちゃんと立つものだそうです．しかし，普通はそうしませんね．不安定だからです．たとえば地震がきたら，それがどんなに弱いものであっても，右の卵はすぐにボウルから転げ落ちてしまうでしょう．最悪，割れてしまうかもしれません．一方，左の置き方であれば大丈夫でしょう．地震がおさまってしばらくすれば，卵はもとのボウルの底で落ち着くはずです．

ここで注意すべきことは，「立った卵をただ呆然と眺めているだけでは，不安定であることは確かめられない」ということです．地震がきて「揺さぶられる」ことによって，初めて明らかにされた性質だったということです．

料理のレシピの安定性.　マヨネーズを作りましょう．ネットで検索すると,「オレンジページ net」にコウケンテツさんのレシピがありました.

材料	作り方
• 卵黄　2 個分 • 塩　小さじ 1 • サラダ油　1 カップ • 酢　大さじ 2	1. ボウルに卵黄，塩，酢をいれて，もったりとするまで泡立て器で混ぜ合わせる. 2. サラダ油を少しずつ加え，そのつどよく混ぜ合わせる．白っぽくクリーム状になったらできあがり

簡単そうですね．ちなみに料理用語で「小さじ 1」は 5ml,「大さじ 1」は 15ml,「1 カップ」は 200ml です.

このレシピは「安定」でしょうか？ たとえば，材料の卵にはいろいんなサイズ（個体差）があります.「小さじ 1」の塩も，面倒な人は正確に計らずに入れてしまうかもしれません．正確に計っても，5.02ml とか 4.98ml とか，微小な誤差はまぬがれません．作り方にも「誤差」の入る余地があります．1 の「もったりとする」具合であるとか，2 のサラダ油を「少しずつ」入れる加減であるとか,「よく」混ぜ合わせる塩梅だとか．ようするに，個人の解釈に任されている部分です.

経験上，料理のレシピというものは，その程度の誤差では破綻しません．多少の「揺らぎ」に耐えるものでないと，レシピとして他人に伝えることはできないと思います．料理の再現性を確保するには,「揺らぎ」に対して「安定」であることが求められるのです. 塩の分量をちょっと間違ったからといって，急にケチャップになってしまったら困りますよね．実際，ほかにマヨネーズのレシピを調べてみると，材料の比率も作り方もさまざまであることがわかります．きっと出来上がりの色合いや味わいにも違いがあることでしょう．そもそも，私たちにとっての「マヨネーズ」という概念そのものが，そいういう「揺らぎ」を含み入れて成立しているということです.

数学における安定性（その 1）.　次に，私たちにとってお馴染みの数学の中で，安定性や不安定性を考えてみましょう.

実 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ が異なる 2 つの実数解を持つ

という性質（命題）は，「安定」でしょうか？ 微小な「揺らぎ」に対して命題の真偽が変化するか，ということです．そのような「揺らぎ」は，実用上避けて通ることはできません．なぜなら，数値計算をするときは小数をある桁で打ち切った近似値を使うことになるからです．実際，現在の一般的なコンピューターが数値として扱うことができるのは「浮動小数点数」とよばれる有限個の有理数だけなので，無理数が絡む計算には必然的に誤差が混入します．

さて，方程式 $ax^2+bx+c=0$ が異なる 2 つの実数解を持つための必要十分条件は，xy 平面内にある 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが，x 軸と異なる 2 つ点で交わることでした．この関数の係数が揺らぐ，すなわち誤差が入るということは，放物線の形がわずかに変化するということです．図を描いてみたらわかりますが，「x 軸と異なる 2 つ点で交わる」という性質は放物線の形が多少変化しても（その変化量が十分に小さければ）変わりません．「安定」だということです[1].

一方，「方程式 $ax^2+bx+c=0$ がただ 1 つの実数解（重解）をもつ」の場合はどうでしょう？ このとき，$y=ax^2+bx+c$ のグラフは「x 軸とただ 1 つ点で交わる（接する）」わけですが，この性質は非常にもろくて，たとえば，c の値が少しでも増減したら崩れてしまいます．一般に，「重解をもつ」というのは「卵が立っている」のと同じで，「不安定」な状態なのです．

数学における安定性（その 2）． もうひとつ，お馴染みの数学の中から．

$$\boxed{\text{実 2 次正方行列} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{は逆行列をもたない}}$$

という性質（命題）は，「安定」でしょうか？ こちらも，コンピューターで扱うときには誤差が問題になりうるので，微小な「揺らぎ」に対して変化するかどうかを考える意義は十分にあります．

線形代数で学ぶように，この行列の行列式 $ad-bc$ は 0 になります．したがって，$ad=bc$．これより，ベクトル $(a,\,c)$ とベクトル $(b,\,d)$ は $\mathbb{R}^2$ の中で一方が一方の定数倍になっているはずです．幾何学的には，$\mathbb{R}^2$ の中の，原点を通るある同一直線上にこれらのベクトルが乗っていることになります．いま，これらのベクトルに何らかの誤差が

[1] ここでいう「安定性」は，判別式に関する条件 $b^2-4ac>0$ が係数の空間（abc 空間から平面 $a=0$ を除いたもの）で開集合を定めていることをいい換えただけです．数学では，「条件 $b^2-4ac>0$ はオープンな条件である」（だから係数をわずかに変えても真偽は変わらない）といったりします．数学において「開集合」がよく登場する理由の 1 つは，こうした「安定性」を示唆する集合だからかもしれません．

混入してしまった場合，そのような性質は簡単に崩れてしまうことが想像されます．すなわち，「不安定」な性質なのです．

実際，実 2 次正方行列に行列式を対応させる関数を考えたとき，実 2 次正方行列全体の空間（これは $\mathbb{R}^4$ と同一視できます）に行列式の値に応じた「等高線」を考えることができます（天気図の気圧分布のようなものを考えるとよいです）．行列式の値が 0 という特定の値になるような行列たちは，実 2 次正方行列全体におけるただ 1 本の「高さ 0 の等高線」のうえに辛うじて立つ卵のような存在なのです．ちょっとした「揺らぎ」によってその等高線から滑り落ち，行列式は 0 でない値となる．すなわち，逆行列をもつような行列へと変化してしまうのです．線形代数の立場からすれば，これは卵が割れるような劇的な変化です．

その他，身の回りの安定性について． 料理や数学以外においても，安定性，不安定性を考えてみるのは有意義なことかもしれません．たとえば，

- 生物（個体）は安定？（髪の毛が 1 本抜けたら，私が私でなくなる・・・？）
- 経済は安定？（いつもよりいい卵を買ってしまったら・・・？）
- 太陽系は安定？（太陽系外から謎の巨大天体が・・・！）
- あの人のご機嫌は安定？（ちょっと探りをいれてみましょう）
- 言葉や概念は安定？（「面白い数学」には個人差が）

などなど．これらに共通しているのは，ただ眺めているだけでは安定性というものは判別できず，何かしらの「揺らぎ」を与えてその変化をみないとわからないということ．そして「揺らぎ」を許容する「遊び」の部分が安定性を生むのだということです．

2 フラクタル

「フラクタル」というのは，ある種の「自己相似性」をもつことを意味する形容詞，もしくはそのような形状をもつものを表す名詞でもあります．1970 年代に，ブノワ・マンデルブローという科学者がラテン語の fractus（バラバラ，壊れた）という言葉をもじって作った造語です．

では，「自己相似性」とはなんでしょうか．標語的には「部分が全体に似ていること」などといわれるのですが，これだけではピンとこないのが普通です．

典型的な例としてあげられるのは，地図における海岸線です．地図の海岸線は，どのような縮尺の地図であっても同じようにギザギザしています．ギザギザを拡大してもギザギザしている．「小さなギザギザたちで構成されたギザギザ」とでもいいましょうか．同様に，野菜のロマネスコ（図 1）は「小さなイボイボたちで構成されたイボイボ」，カリフラワーは「小さなモコモコたちで構成されたモコモコ」といった具合です．

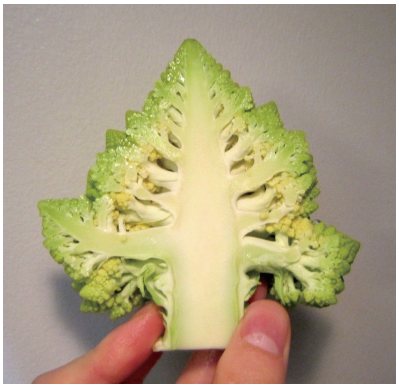


図 1: ロマネスコ

一方，円や放物線の一部を拡大してみましょう．どんどんズームアップしていくと，これらの曲線の曲がり具合は次第に和らいで，そのうち直線（線分）のように見えることでしょう．決して，円や放物線が再び見えてくることはありません．「部分が全体に似ていない」ということです．

私たちの住む世界には，木や血管の枝分かれの様子や，株価のチャートなど，「フラクタル」と形容されるものがたくさんあります．これらすべてを包含する「フラクタル」の定義は難しく，好きなだけ理想化が許される数学においてすら，「フラクタル性」の特徴づけには複数の流儀があります．

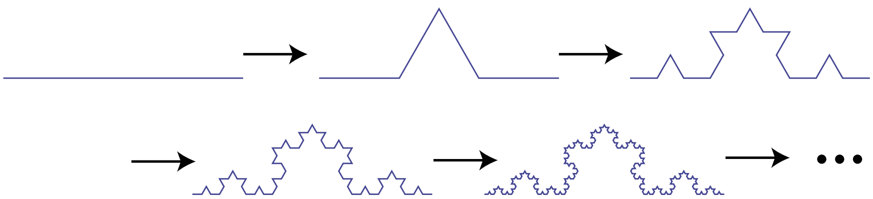


図 2: コッホ曲線の作り方

数学におけるフラクタル．　数学におけるフラクタルの典型的な例を見ていきましょう．ただし，図示が容易な平面上のものに限定します．

まずはコッホ曲線．図 2 のように．線分の中央部分に新たな角を加え尖らせるという操作を繰り返していった「極限」として得られる図形です．（今回のお話では，このコッホ曲線の「安定性」について詳しく調べていきます．）

図 3 は，上から「シェルピンスキーの三角形（シェルピンスキー・ガスケット）」，「シェルピンスキー・カーペット」，「ペンタクン」とよばれるフラクタルです．非常に対称性が高く見栄えがよいのですが，そのぶん壊れやすそうな印象も受けます．「シェルピンスキーの三角形」なんかは，トランプで作ったタワーみたいですしね．フラクタルの語源が「壊れた」を意味するラテン語であることも影響しているのかもしれませんが，私には，これらのフラクタルは「立った卵」のような特殊な存在であり，「揺らぎ」によって容易に崩れ，消え去ってしまうようにも見えるのです．

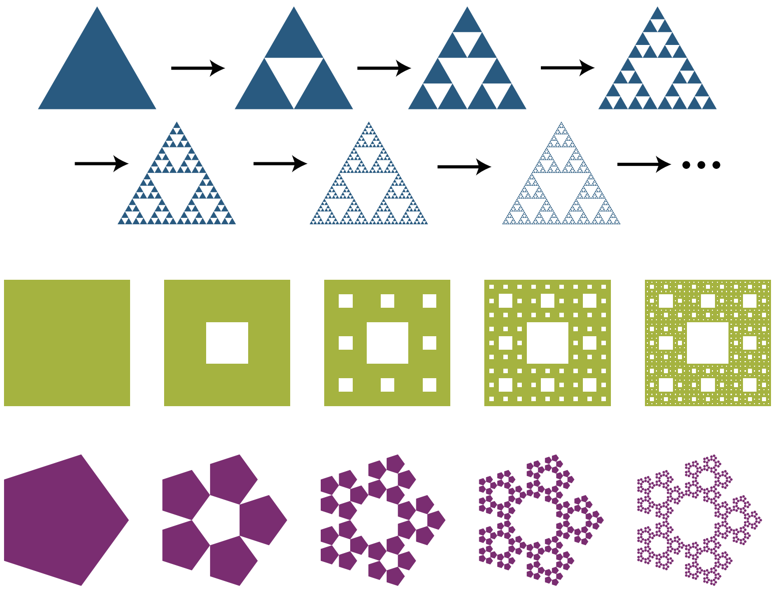


図 3: その他の数学的なフラクタル

3　フラクタルのレシピ

では，上でみたような「数学におけるフラクタル」の安定性について考えていきましょう．まずはフラクタルの作り方，いわば「レシピ」を，数学的に記述していきます．

コッホ曲線のレシピ．　図 4 のように，頂角 120 度の二等辺三角形 X_0 から正三角形を 1 つくり抜き，残った部分を X_1 とします．さらに，X_1 を構成する 2 つの二等辺三角形から正三角形をそれぞれくり抜き X_2 とします．この作業を無限に繰り返していった「極限」もまた，コッホ曲線なのです．これを「レシピ」としてまとめるには，「二等辺三角

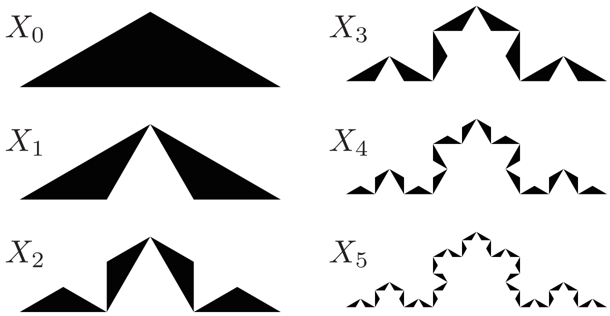


図 4: コッホ曲線の作り方，その 2

形から正三角形を 1 つくり抜く」,「それを繰り返して極限をとる」という作業を数学的に記述しなくてはなりません．いろいろと方法はあるかと思うのですが，ここではこれらの図形が複素平面にあるものと考えて，次のような「レシピ」を考えましょう．具体的な関数（複素関数）の式が出てきますが，それを覚えたり計算する必要はありません．これから図を用いて順に説明してみます．

コッホ曲線のレシピ

(1) $s := e^{\pi i/6}/\sqrt{3}$ とし，複素数 z に対し関数 $T_1(z)$, $T_2(z)$ を次で定める．

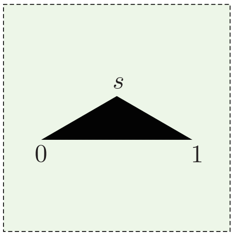
$$T_1(z) := s\,\overline{z} \qquad T_2(z) := \overline{s}\,(\overline{z}-1)+1$$

ただし，$\overline{s}$ と $\overline{z}$ はそれぞれ s と z の複素共役．

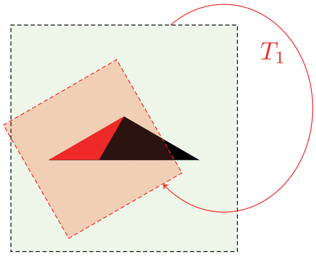
(2) 集合の列 X_0, X_1, $\cdots$ を次の漸化式で定める．

$$X_0 := 0,\ 1,\ s \text{ を頂点とする三角形}$$
$$X_{n+1} := T_1(X_n) \cup T_2(X_n)$$

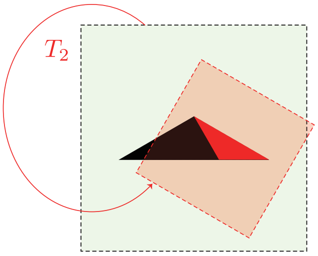
(3) $n \to \infty$ のとき，X_n はコッホ曲線に「収束する」.

1. 

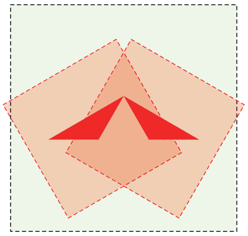
X_0 は，0, 1, s を頂点とする三角形です（**材料**）．ただし，$s = e^{\pi i/6}/\sqrt{3} = (1/2) + (\sqrt{3}/6)i$ とします．

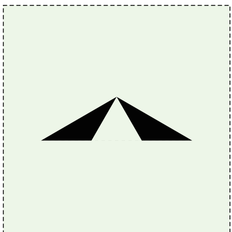
2. 

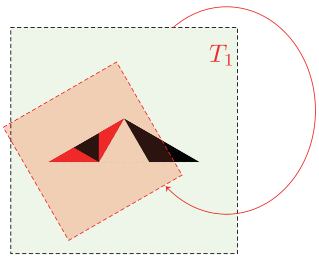
T_1 は 0, 1, s をこの順で 0, s, 1/3 に写す相似変換です（**道具その 1**）．

3. 

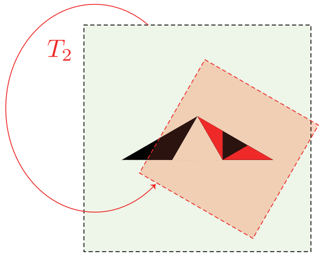
T_2 は 0, 1, s をこの順で s, 1, 2/3 に写す相似変換です（**道具その 2**）．

4. 
$X_1 := T_1(X_0) \cup T_2(X_0)$ と定義します．

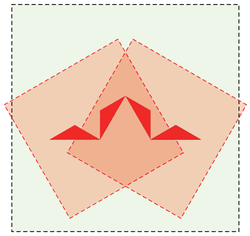
5. 
X_1 に対してこれを繰り返します．

6. 

T_1 による X_1 の像です．

7. 

T_2 による X_1 の像です．

8. 

$X_2 := T_1(X_1) \cup T_2(X_1)$ と定義します．以下同様です．

以上は「レシピ」の (1) と (2) の説明ですが，(3) の「極限」をどうとるか（そもそも存在するのか）という部分は数学的には少しデリケートですから，省略させていただくことにします[2]．

4　レシピの安定性

次に，コッホ曲線のレシピの安定性について考えてみましょう．マヨネーズのレシピを思い出すと，材料や調理手順には，「誤差」や「ゆらぎ」が免れないのでした．さらに，冒頭の卵の置き方の例を思い出すと，「誤差」や「ゆらぎ」は結果に劇的な変化をもたらす可能性があるのでした．

では，コッホ曲線のレシピに「誤差」や「ゆらぎ」を与えてみましょう．たとえば，

- 「材料」X_0 を少し変えてみる
- 「道具」T_1 と T_2 を少し変えてみる

ということをしてみます．これは実際にプログラムを書いてシミュレートしてみると面白いのですが，

- 「材料」X_0 を別の集合に変えてみても，「極限」のコッホ曲線は変わらない
- 「道具」T_1 と T_2 を少し変えたら，変えたぶんに応じて極限のフラクタル集合がコッホ曲線から連続的に変化する

[2]大学の数学科で学ぶ標準的な距離空間の理論によってうまく正当化することができます．

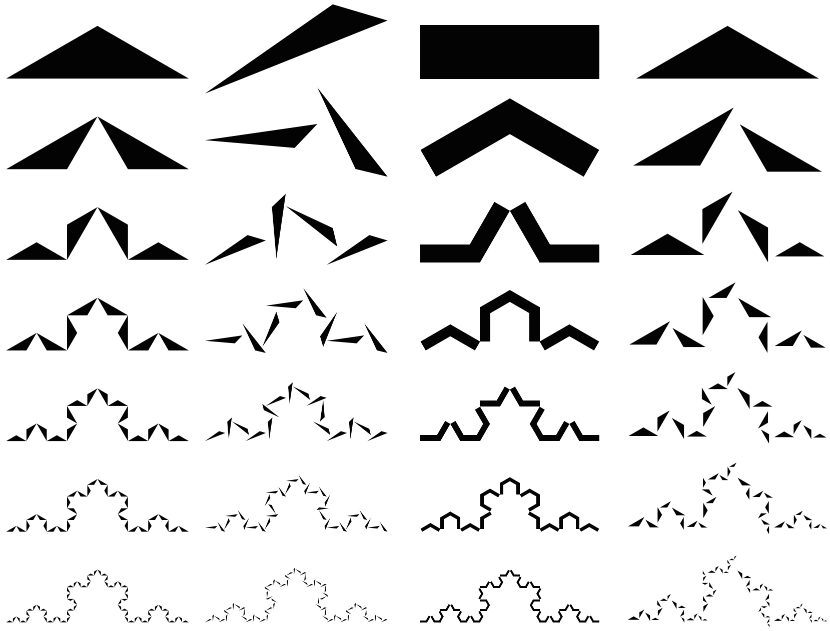


図 5: 左端がオリジナルの「材料」X_0 とレシピ．中の 2 つは「材料」を変えたもの．右端はオリジナルの「材料」で，「道具」T_1 と T_2 を少し変えたもの．

ことがわかります（図 5）．卵が転げ落ちて割れてしまうような，劇的は変化は見られません．つまり，レシピとしては非常に安定していることが伺えます（だからこそ，数値計算がうまくいくのです）．ただし，「道具」T_1 と T_2 を変えると，コッホ曲線が持っている美しい対称性は崩れてしまいます．それは，T_1 と T_2 のペアが偶然持っていた対称性が反映したものだったのです．

5　抽象化：力学系による定式化

最後に，コッホ曲線を生成するレシピが安定している理由を，「力学系」という数学の言葉で記述してみましょう．

「力学系」とは何かを標語的に述べると，「空間」，「時間」，「運動法則」の 3 要素をもった「世界（宇宙）のモデル」だといえます．ここではもう少し具体的に，

- **空間**　何かしらの集合 $\mathbb{X}$
- **時間**　0，1，2，$\cdots$（秒）
- **運動法則**　何かしらの写像（関数）$F : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$

という 3 要素を考えて，「空間」$\mathbb{X}$ 内の点たちが「時間」とともに，

点 $X \in \mathbb{X}$ にある動点は，1 秒後に $F(X) \in \mathbb{X}$ に移動する

という「運動法則」にしたがって動き回る，という状況を考えます（図 6）．これを，「集合 $\mathbb{X}$ 上の写像 F による（離散）力学系」といいます[3]．

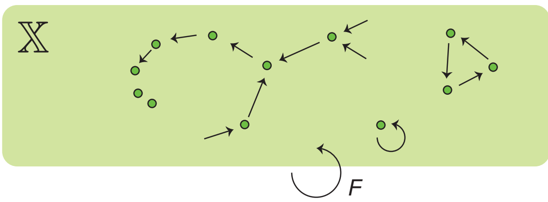


図 6: 空間 $\mathbb{X}$ 上の写像 F による（離散）力学系

コッホ曲線のレシピは，次のような「力学系」として一般化することができます．

- **空間**　$\mathbb{X}$：複素平面上の（空でないコンパクト）集合全体
- **時間**　0，1，2，$\cdots$（秒）
- **運動法則**　$F : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ は次で定める：$X \in \mathbb{X}$ に対し，

$$F(X) := T_1(X) \cup T_2(X) \cup \cdots \cup T_m(X) \ \in \ \mathbb{X}.$$

ただし，T_1，T_2，$\cdots$，T_m は複素平面から自身への縮小相似変換.

「空間」$\mathbb{X}$ は，複素平面上の図形をすべて集めてきたような集合です[4]．円や多角形，この世に存在するすべての文字など，私たちが考えうるあらゆる平面図形が，この $\mathbb{X}$ 上

[3] ふつうは $\mathbb{X}$ として位相空間や多様体をとり，F として連続写像や可微分写像を選びます．カオスのような面白い現象を発生させるためには，$\mathbb{X}$ や F として適度に難しいものを選ばなくてはいけません．

[4] 技術的な理由で，空でないコンパクト集合（有界閉集合）のみを考えます．こうすることで，$\mathbb{X}$ を完備な距離空間とみなすことができ，極限の存在が容易に確認できるようになるからです．

の「点」として存在しています．「運動法則」の縮小相似変換とは，複素平面から自身への相似変換（鏡像も許す）のうち，2 点間の距離が一定の比率で縮小されるものをいいます．コッホ曲線のレシピに対応する力学系の場合は $m=2$ で，T_1 と T_2 は同じ縮小率 $1/\sqrt{3}$ を持っています．さらに，複素平面上の（空でないコンパクト）集合 X を，$F(X)=T_1(X)\cup T_2(X)$ という集合に対応させる写像 $F:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ が「運動法則」として与えられているわけです．

このとき，次のことがわかります[5]．

> **コラージュ定理**　F の<u>不動点</u> $E=E_F\in\mathbb{X}$ が存在し，<u>すべての</u> $X\in\mathbb{X}$ に対し
> $$X_0=X,\quad X_{n+1}:=F(X_n)$$
> で定まる集合の列 X_0，X_1，X_2，$\cdots$ は $E=E_F$ に「収束」する．

コッホ曲線のレシピに対応する力学系の場合は，この不動点 $E\in\mathbb{X}$ がコッホ曲線なのです．この定理によって，どんな「材料」X_0 を選んでも，列 X_n が同じコッホ曲線に「収束」することが説明されます（図 7）．

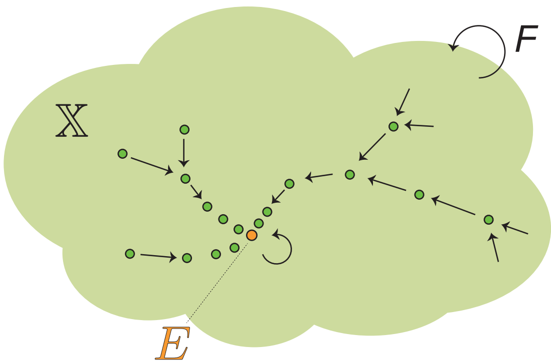


図 7: すべての点が不動点に収束する力学系

コラージュ定理の証明には「バナッハの不動点定理」を用います．「バナッハの不動点定理」とは，写像 $F:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ が 2 点間の距離を一定以下の比率で縮小する作用をもつときに，その繰り返しによってすべての点がある不動点に収束する，という定理です（図 8 左）．コラージュ定理では，F を定める写像 T_1，T_2，$\cdots$，T_m が縮小相似変換であることからその性質が導かれます．

[5] コラージュ定理は，Michael Barnsley という数学者が 1980 年代に証明したものだそうです．詳しくは参考文献 [1] および [2] をご参照ください．

また，その極限 $E = E_F$ は写像 F の不動点であることから，等式

$$E = T_1(E) \cup T_2(E) \cup \cdots \cup T_m(E)$$

が成立します．各 $T_1(E)$, $T_2(E)$, $\cdots$, $T_m(E)$ は E を縮小したコピーですから，この等式から E が E の m 個の縮小コピーから構成されていることがわかります．すなわち，「自己相似」というフラクタル集合の性質が実現されているわけです．「コラージュ」という定理の呼び名も，この性質に由来しています．

「道具」を揺らしてみる．　写像 F の定義に用いた縮小相似変換 T_1, T_2, $\cdots$, T_m をそれぞれわずかに変化させて，別の縮小相似変換 $\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2, \cdots, \widetilde{T}_m$ に変えてみます．すると，$\mathbb{X}$ から $\mathbb{X}$ への写像

$$G(X) := \widetilde{T}_1(X) \cup \widetilde{T}_2(X) \cup \cdots \cup \widetilde{T}_m(X)$$

が定まります．これは，同じ $\mathbb{X}$ という空間に，F とはわずかに異なる G という別の「運動法則」を定めることになります．証明は簡単ではありませんが，G にも不動点 E_G が存在して，G が F から変化した分に応じて不動点 E_F も連続的に不動点 E_G に変化することがわかります（図 8 右）．これは，フラクタルのレシピの「道具」を少し変えたら，変えた分に応じて極限のフラクタル集合が連続的に変化することを意味しています．こちらも，レシピの安定性を支持する結果となっているのです．

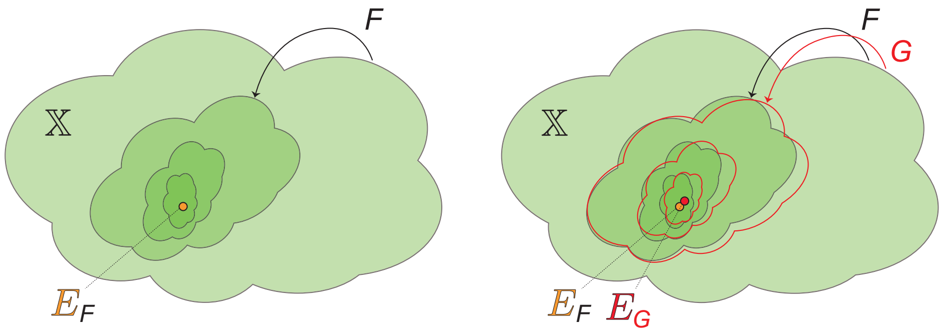


図 8: バナッハの不動点定理による不動点の存在

6　まとめ

最後に，今回のお話を標語的にまとめると，

- 安定か不安定かどうかは，揺らしてみないとわからない.
- 揺らぎを許容する「遊び」が安定を生む.
- 複雑なフラクタルも安定な存在.

ということになるかと思います．身の回りをちょっと見渡してみると，私たちの住む世界は安定なもので溢れていることがわかります．たまたま不安定なものがあっても，そのうち「誤差」や「揺らぎ」にさらされて，別のより安定な状態へと移っていく.「立った卵」は，なかなか見つからないものなのです．そんな中で，フラクタルという概念が私たちに認知可能だということは，それが何らかの安定なシステムによって生成されているからだといえるでしょう.

謝辞.　講演の機会を下さいました中央大学および日本数学会の皆様，講演内容についてコメントと情報を下さいました早稲田大学の小森洋平先生に，深くお礼申し上げます.

参考文献

[1] K. ファルコナー,『フラクタル幾何学の技法』, シュプリンガー・フェアラーク東京， 2002.

[2] 小森洋平,『無限をみつめるフラクタル幾何学の世界』, 数学セミナー 2001 年 2 月号，pp.2–5.