授賞報告
2023年度日本数学会代数学賞

2023 年度日本数学会代数学賞は，權業善範氏（東京大学 大学院数理科学研究科），若槻聡氏（金沢大学 理工研究域 数物科学系）が受賞されました．

權業善範氏「高次元極小モデル理論の構築とその応用」

權業善範氏は代数幾何学の中の双有理幾何学, とりわけアバンダンス予想 (abundance conjecture) を中心に極小モデル理論の研究をしてきた.

極小モデル予想とは, 任意の代数多様体は良い双有理モデル（極小モデル）X を持つという予想である．良いモデルというのは標準因子 (canonical divisor) K_X の曲線との交点数に関する数値的条件で定義される．この予想は, 極小モデルの存在という代数多様体の分類の出発点を与えるだけではなく, 双有理写像という代数幾何学特有の写像の構造を解析するという意味でも重要である．この予想は一般型の代数多様体の場合を含む重要な場合に証明されているが, 完全には未解決であり, フリップ列の終結 (termination) 予想が残っている.

アバンダンス予想とは, 数値的に定義されていた極小モデル X が良い幾何学的構造（ファイバー空間構造 $f : X \to Y$）を持つという予想である．この構造は, 小平邦彦氏による楕円曲面論の高次元化に対応していて, Calabi–Yau ファイバー空間とも呼ばれる. なお, 代数幾何学におけるファイバー空間では, ファイバーの連結性だけが仮定されていて, 特異ファイバーの存在や次元のジャンプさえも許容されている.

固定点自由化定理の一般化を使うと, アバンダンス予想を示すためには以下の 2 点を証明すれば良いことがわかる．(I) 自然数 m が存在して, $H^0(X, mK_X) \neq 0$（大域切断の存在）; (II) K_X が数値的に自明でないときには, さらに以下が成立：$\text{lim-sup}_{m\to\infty} \dim H^0(X, mK_X) = \infty$（大域切断が十分たくさんある, だからアバンダンス）．（I）は非消滅予想とも呼ばれる．（I），（II）両方とも 3 次元では肯定的に解決されているが, 高次元では難しく, なかなか手が出ないのが現状である．（I），（II）をまとめて,「小平次元 ＝ 数値的小平次元」とも表せる．アバンダンス予想は, 極小モデルではないような一般の代数多様体に対しても拡張して考えることができる; 数値的小平次元を小平次元と同様に双有理不変量として定義することができるからである（中山昇氏）．こうすれば, アバンダンス予想を極小モデル予想とは独立に考えることができる.

アバンダンス予想を一般次元で証明するためには, 次元に関する帰納法を使うのが自然である．代数多様体 X に対する予想を代数多様体と境界からなる対 (X, B)（log pair）に対する予想に拡張し, 境界 B（次元が 1 つ低い）での主張を仮定して, B 上の大域切

断を全体 (X,B) にまで延長するという論法である．この場合, B は一般には可約であるので, 元々の代数多様体に関する主張を,（1）log pair に拡張し, さらに（2）可約な対（semi-log pair）にまで拡張するという段階が必要になる．

権業氏は一連の論文で, (1) でのアバンダンス予想と極小モデル予想を仮定すれば,（2）でのアバンダンス予想が従うことを証明した．そのために, 権業氏は自己同型群の多重標準表現の有限性という上野健爾氏による 70 年代の定理を（2）の場合に拡張した．この「大域切断の貼り合わせ」に関する結果は, 次元に関する帰納法を機能させるための重要なステップと言える．

残るのは, 境界上に構成した大域切断を代数多様体全体に延長するという問題である．Demailly 氏は B が既約な場合には大沢–竹越の延長定理を拡張して延長問題を考えたが, B が可約な場合にはなかなかうまくいかなかった．権業氏と松村氏の共同研究はこれに挑戦し, 特異点を持った計量で Lelong 数が消えるようなものの構成に帰着させるというものであった．

以上の結果は標数 0 の体上の代数多様体に関するものであるが, 正標数の体や混標数の環上の代数多様体に関しても同様の理論が期待されており, 権業氏にはその方面の結果もある．現在標数 0 の極小モデル理論の進展は足踏み状態であるが, 正標数や混標数では F 特異点の理論などに大きな進展がある．権業氏はこの方面でも活躍している．

極小モデル理論のような大きな予想を研究することは, たとえ完全に解決ができなくとも部分的な結果が得られたり, または問題を解くための方法の探究を通して重要な発見があったりするため, 非常に重要かつ有意義である．

代数的ファイバー空間の標準因子は相対的な半正値性を持つ．これは小平楕円曲面論における標準因子公式を一般化したものであり, 以下のように述べられる：全空間の標準因子 ＝（底空間の標準因子＋ファイバーの退化から来る境界因子＋ファイバーのモジュライから来る半正値因子）の引き戻し．この性質は, 複素多様体に対しては一般的には成り立たず, 標数 0 の代数多様体特有の現象であり, ファイバーのモジュライ空間の存在と関係していると予想される．

権業氏は半正値性定理やそれを一般化した弱正値性定理をさらに一般化するとともに, これを有理連結性を持つような代数多様体に対して適用して, 全空間の性質から底空間の性質を導くことに応用した．このような論法には, 代数多様体の分類において有用な結果を次々と導くことが期待できる．有理連結多様体は極小モデル理論の帰結の一つとして得られる代数多様体のクラスであり, 有理多様体や単有理多様体を含むものである．例えば, 権業氏は有理連結多様体に対しては非消滅予想が成立することを示している．有理連結多様体の構造の研究はこれから重要性を増すものと思われる．

半正値性定理の状況を一般化して, 代数多様体, 境界因子, 半正値因子（正確には十分高いモデルで半正値になる因子）からなる三つ組を generalized pair と呼ぶ（pair では

ないが）. generalized pair は帰納法との相性がよく, Birkar 氏による BAB 予想の証明で重要な役割を果たしたので, log pair のように独自の分野に発展する可能性がある. そこで權業氏は log pair に関する結果を generalized pair に拡張することに地道に取り組んでいて, termination 予想や abundance 予想に使える日が来ることが期待されている.

これら一連の權業氏の研究は日本が世界に誇れる研究であり, 代数学賞にふさわしいものである.

若槻聡氏「ジーゲル保型形式の明示的次元公式の研究」

今回の受賞対象となった若槻聡氏のもっとも重要な業績は, n 次ジーゲルモジュラー群のレベル N の主合同部分群 $\Gamma(N)$ についてのジーゲル保型形式に関する次の定理である.

Theorem（若槻聡） $N \geq 3$ でかつ $k \geq n+2$ ならば, 主合同部分群 $\Gamma(N)$ に関するウェイト k の正則ジーゲルカスプ形式の次元公式は, いくつかのベルヌーイ数の積の具体的な線形結合で明示的に表される.

ここで $N \geq 3$ という条件は群に捩れがないための条件, $k \geq n+2$ はセルバーグ跡公式ないしはコホモロジーの消滅条件から来ている.

2 次ジーゲル保型形式の次元公式は 1960 年代に井草準一氏が, $N = 1, 2, 4$ などのときに与えたことに始まり, その後 1970 年代に山崎正氏が代数幾何的な方法で $n = 2$ かつ $N \geq 3$ の場合に次元を求めた. これにやや遅れて, 森田康夫氏ないしは U. Christian が, セルバーグ・ゴドマンの跡公式により同じ次元を求めた. この跡公式は $\Gamma(N)$ の共役類に渉る積分で与えられ, 実際の計算は極めて複雑で, しかも大部分の積分がゼロになることを示すのも証明の重要なポイントであった. ここで, 次元公式の一部は概均質ベクトル空間のゼータ関数の特殊値で記述された. 新谷卓郎氏は一般次元の $\Gamma(N)$ $(N \geq 3)$ のジーゲル保型形式の次元公式の一部（ある種の巾単元からの寄与）は対称行列全体のなす概均質ベクトル空間のゼータ関数の特殊値でかけるという結果を証明した. 上記の新谷氏の公式には 2 つの未解決問題があった. ひとつはゼータ関数の特殊値の値自身は, $n = 2$ 以外では全くわからなかったという点である. 1990 年代始めに, 伊吹山知義氏と齋藤裕氏は, 問題になる概均質ベクトル空間のゼータ関数そのものが, 実はよく知られた関数で記述されることを示し, この系として, 問題の特殊値がベルヌーイ数の積で表されることを同時に示した. 新谷氏の公式のもう一つの問題点は, 彼の与えた巾単元以外の寄与がどうなるのか不明だった点にある. 実は 1970 年代から, $\Gamma(N)$ $(N \geq 3)$ に関する限りは, 新谷氏の公式にあらわれない元の寄与は全部消えていると信じている人が多かったが, 伊吹

山・齋藤両氏の結果により, これらが消えていると仮定しても次元は正整数になるということがはっきりしたので, 一般次元での具体的な次元公式が予想として発表された.

そして, 今般, やっとその予想が若槻聡氏により, 他の寄与すべてが消滅することを示すことにより証明された. これは新谷氏の結果の 2 つ目の問題点を完全に解いた結果で, さらに若槻氏は, 一般次元でジーゲルモジュラー群と通約的, かつ捩れのない任意の離散群のスカラー値保型形式の次元公式が, ある種の概均質ベクトル空間のゼータ関数の特殊値の和で書けることも証明した. ここでは個々の特殊値の値は与えられていないが, 非常に明確な一般公式と言える.

最近, Arthur 等により跡公式の一般論が大きく発展しているが, 若槻氏の証明はそれだけによるものではなく, ゴドマンの跡公式に発している. そこでは, たとえば巾単元には実際にどのような種類があるのかという分類をきちんと用いて, invariant weighted orbital integral と non-invariant orbital integral の比較, compact support でない test function での積分の収束, またその消滅など, 一歩一歩, 寄与の消滅が証明されている. 以上は最近の跡公式の発展と古典的な跡公式を非常に上手に組み合わせた上で議論を進めている. 何かが消滅するというのは, 結果的な公式では目に見えないが, そのような結果の重要性はコホモロジーの消滅定理などを見るまでもなく明らかである. ちなみにこの分野では上で記載した以外にも多くの歴代の日本人研究者がおり, 最近でこそ Chenevier, Lanne, Taïbi などが非常に深い研究を行っているが, 旧来は一般論以外の結果は外国にはあまり存在せず, その意味で, 今回の最終結論が日本の長い研究を完結させた集大成という面がある. ちなみに以下にも解説がある.

「若槻聡, 一般次数のジーゲル保型形式の次元公式,「数学」72 巻 3 号 (2022), 280–300.」

若槻氏の他の業績には次のような研究がある. まず, 次数 2 の正則でない保型形式の次元公式を求めている. これは離散系列の中で正則離散系列以外の large discrete series に対応する実解析的保型形式の具体的な次元公式で, このような結果は他に実ランク 1 の群についての荒川恒男氏の結果くらいしか存在しなかった. これらは捩れのある群を扱っているので, 結論は多数の寄与の和という複雑な形をしている. またベクトル値ジーゲル保型形式（ウェイトがスカラー値でない場合）についての次元公式も具体的に与えており, 次元公式の基本文献のひとつとなっている. そのほかに, 概均質ベクトル空間の b 関数の研究, 一般の跡公式に関する Hoffmann との共同研究などがあり, 最近は保型形式の解析数論的な方面にも新境地を開きつつある.

以上, 長年の懸案などを最終解決した若槻氏の優れた業績は代数学賞を受賞するにふさわしいものである.

（代数学賞委員会委員長　内藤聡　東京工業大学理学院）