数学教室だより：アウトリーチ編

明治大学 MIMS 主催の「高校生による研究発表会」

明治大学先端数理科学インスティテュート（MIMS）では，2011 年度から 2018 年度まで，毎年 10 月に「高校生による現象数理学研究発表会」を開催し，全国各地の高校の生徒さんによる意欲的な研究発表が行われました．しかし 2019 年度の第 9 回は台風 19 号のため直前に中止を余儀なくされ，2020 年度は新型コロナウイルス感染症の感染拡大により開催できませんでした．

年が明けてもコロナ禍が収まらない中，MIMS では，2021 年度より新しいプログラムとして「高校生のための現象数理学入門講座と研究発表会」を立ち上げました．これは Zoom ウェビナーを用いたオンラインのプログラムで，数理的視点を自然や社会の理解に活用する面白さを２名の講師が語る入門講座と，高校生による研究発表会の二部構成です．二部構成にすることで，プログラムに幅を持たせることができたと思います．

また，以前の高校生発表会は一日だけのプログラムで，事前に参加登録した高校生の皆さんに会場で次々と発表してもらい，当日の審査で発表者の中から優秀な研究を選んで表彰するという形式でしたが，これだと発表の場を提供するだけで一日がほとんど終わり，参加者に対する十分なフィードバックをする時間的余裕がありませんでした．そこで今回立ち上げた新しいプログラムでは，オンラインで投稿された応募研究を時間をかけて審査し，その中から選ばれた受賞者（優秀賞，奨励賞）には発表会の前に発表動画を作成してもらって発表会当日に Zoom 上で放映するとともに，後日，受賞しなかった応募者全員に詳しい講評を送りました．これは結構な作業量でしたが，それなりに意味のあるフィードバックができたと思います．また，発表会の公式プログラム終了後，参加した高校生や高校の先生方，および明治大学の教員を交えたインフォーマルなオンライン懇談会を開き，自由な意見交換を行いました．

発表会の時期については，2018 年度までの旧プログラムが体育の日（10 月第２月曜日）の前日に開かれていたので，新しいプログラムもこれを踏襲しました．（ただし，2020 年から「体育の日」は「スポーツの日」に名前を変えました．）時期的には少し早めですが，他大学の同種のイベントと時期が重なることを避けるため，あえて日程は変更しませんでした．開催時期については，今後検討の余地があるかもしれません．なお，応募研究の中には，かなり高水準のものが数多く見られ，我々審査員を驚かせました．

2021 年度と 2022 年度のプログラムの概要を以下に記します．

1　2021 年度のプログラム

2021 年度は 10 月 9 日（土），10 日（日）に開催しました．翌 11 日（月）が「スポーツの日」の休日で，その前の 2 日間を使いました（ただし土曜日は午後のみ）．先にも述べたように，2018 年まで続いた前身の「高校生による現象数理学研究発表会」が体育の日の前日に開かれていたので，それを踏襲した形です．

第 1 部の現象数理学入門講座は，土曜日の午後と日曜日の午前に開きました．講師と講座のタイトルは次の通りです．

- 「現象数理学おもしろ講座 1，2」（矢崎成俊）
- 「トポロジーで探る対称性と周期性 1，2」（河野俊丈）

詳細は，次の URL をご覧ください．

http : //www.mims.meiji.ac.jp/seminars/another/2021/20211009-10_entry.html

第 2 部の高校生による研究発表会は日曜日の午後に開きました．25 件の応募があり，意欲的な研究が多く見られました．受賞研究は次の通りです（高校名のみ記載）．

【優秀賞】（3 件）

- 「円形会議場での効率的かつ安全な会議方法」（筑波大学附属駒場高等学校 1 名）
- 「Buffon's leaf problem」（広島大学附属高等学校 4 名）
- 「塾生数の動向予測 – SIR モデルとヒット現象モデルを用いたシミュレーション」（広尾学園高等学校 2 名）

【奨励賞】（2 件）

- 「実現可能な錯視立体の作成」（広尾学園高等学校 2 名）
- 「待ち行列理論を用いたエスカレーターの乗り方の評価」（広尾学園高等学校 1 名）

受賞研究の内容を簡単に紹介します．スペースの制約上，一部の紹介にとどめますが，詳細は上述の URL をご覧ください．

♦「円形会議場での $\cdots$」は，大きな円上に座席が 1 つずつ等間隔に並べられた会議場で会議を進める際，発言者が自分の座席から発言する場合と円の中心に立って発言する場合とで，発言に必要なエネルギー量や飛沫の量がどれだけ違うかを調べた研究です．ただしマイクは使わないと仮定しています．この研究では，まず，自力で発見した等式

$$(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)\cdots(1-\alpha^{n-1}) = n \quad (\alpha \text{ は } 1 \text{ の } n \text{ 乗根})$$

を用いて半径 1 の円に内接する正 n 角形 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\cdots\mathrm{A}_{n-1}$ に対して

$$\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\times\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2\times\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3\times\cdots\times\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{n-1}=n$$

が成り立つことを示し，さらに三角関数の加法定理から次式を導いています．

$$\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2+\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3+\cdots+\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{n-1}=\frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

そして距離と音圧の関係式から，それぞれの場合に必要な声量を上の 2 つの公式から割り出し，そこから飛沫の量を推定する独自の計算式を用いて，最終的に円の中心に立って発言するよりも自分の座席から発言した方が飛沫の総量が約 1.3 倍に増え，さらに独自に定めた安全性の指標を用いると，中心に立って発言した方が自分の座席から発言するよりも安全性の観点から約 3 倍効果的だという結論を導いています．この結論を導く際に用いたさまざまな設定が現実的かどうかは多分に議論の余地がありますが，数学的考察と物理的考察を組み合わせた論旨にはそれなりに説得力があり，コロナ禍の世相を反映したタイムリーなテーマの選択でした．

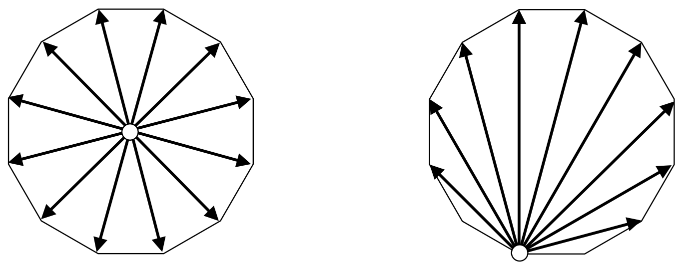

図 1: 円の中心から発言する場合と自分の席から発言する場合の比較

♦「Buffon's leaf problem」は，古典的な Buffon の針の問題を凸図形に一般化した公式を使って，実際の落ち葉をばらまく実験から π の値が統計的に得られるかどうかを確かめた研究です．「Buffon の針の問題」とは，平面上に等間隔 d で引かれた平行線の集まりの上に長さ ℓ（ただし $\ell<d$）の針をランダムな位置や角度で落としたとき，針が平行線と交差する確率を求める問題です．よく知られているように，答は $\frac{2\ell}{\pi d}$ です (Buffon 1777). 同様の結果は針を凸図形で置き換えても成り立つことが知られており，凸図形 K の周長を $L(K)$ で表すと，K の最大直径が $diam(K)<d$ をみたせば，この凸図形を平行線族の上にランダムな位置・角度で落としたとき，凸図形と平行線が交わる確率 $P(K)$ は

$$diam(K)<d \implies P(K)=\frac{L(K)}{\pi d} \tag{1}$$

で与えられます．この結果の証明が Uspensky の本（*Introduction to Mathematical Probability*, 1937）に載っていますが，参考のため本稿の最後に簡単な証明を書いておきます．

さて，本研究の発表者は，床に敷いた大きな紙の上にさまざまな大きさや形の落ち葉をランダムにばらまく実験を何度も繰り返し（図 2 左），それをカメラで撮って，落ち葉が平行線と交わる頻度を画像処理プログラムを使って自動計算し，その結果と公式 (1) を組み合わせることで，ある統計量が π の値に近づくかどうかを調べました．

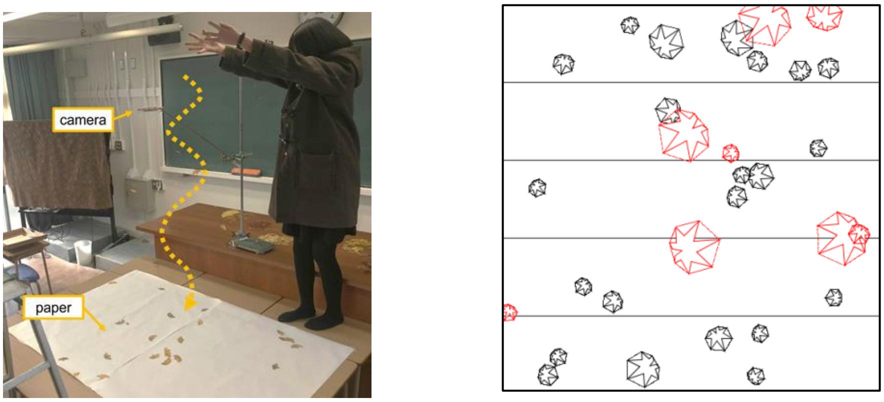

図 2: 落ち葉を用いた Buffon problem の実験（受賞者の発表研究より抜粋）

もう少し詳しく述べると，落ち葉が平行線と交わることと，その落ち葉の凸包が平行線と交わることは同値ですが，それぞれの落ち葉の凸包が平行線と交わる確率は公式 (1) より凸包の周長に比例するので，落ち葉が平行線と交わる回数を数える際，その値を凸包の周長で割った重み付き回数を計算すれば，統計的に $1/\pi d$ の値が得られることが期待されます．この計算も，画像処理を用いて自動的に実行したようです．合計 20 回の実験を繰り返し，π の近似値として 3.1569 という値を得たことが報告されています．

高校生の研究に公式 (1) が使われていたことに最初驚きましたが，この研究は同校 OB の指導で進められた部分が多いようです．ただ，その点を差し引いても，興味深い数学理論と楽しい実験を組み合わせたユニークな研究内容は高く評価してよいと思います．

♦ 「塾生数の動向予測 $\cdots$」は，少子化が進む中，塾生数が将来どのように変化するかを数理モデルを使って予測した研究です．感染症モデルとして古くから知られている SIR モデルと，「ヒット現象モデル」と呼ばれる別の数理モデルを使って考察しています．

SIR モデルは，1927 年に Kermack と McKendrick が提唱した感染症の流行を記述する古典的な数理モデルで，$S(t), I(t), R(t)$ という 3 つの変数から構成され，これらはそれぞれ時刻 t における未感染者数，感染者数，回復者数（免疫保持者，入院患者などの数）を

表します．通常の SIR モデルは，次の形の微分方程式系で書かれます．

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\beta}{N} S(t)I(t), \quad \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta}{N} S(t)I(t) - \gamma I(t), \quad \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t).$$

ここで β, γ は，それぞれ感染率，回復率と呼ばれる定数で，N は総人口を表します．本研究の発表者は，S を「未通塾者」，I を「通塾者」，R を「元通塾者」と読み替え，β を未通塾者が（既存の通塾者の影響で）塾に通うようになる「誘導率」，γ を「退会率」，N を各年度の日本の高校生の総数と解釈し，SIR モデルを塾生数の変動を記述するモデルとして定式化することを試みました．ただ，未通塾者が塾に通うようになるきっかけは，周囲の通塾者の影響に限らず，電車のつり革広告やテレビなどの影響で入塾するケースも考えられるので，後者の影響を表す係数 k を導入して「宣伝率」と呼んでいます．さらに，高校生の人口を各学年ごとに分けて年齢構造を導入し，また，時間については 1 年を単位とする離散時間を採用して，SIR モデルを補正した差分方程式モデルを構成しました．この式は，ここには書きませんが，基本的には，年齢構造の入った時間離散的 SIR モデルに宣伝の影響を付け加えたモデルと位置づけられます．

この研究では，このモデルの数値シミュレーションと，河合塾ナマビスが公表している 14 年分のデータや文部科学省が行っている高校生数の調査データを比較してパラメータ推定を行い，得られたパラメータの値を用いて将来予測をしています．その結果，2032 年をピークとして塾生数が減少に転じるという予想が述べられています．さらに，宣伝力 k を今後いろいろ変えたときに塾生数の将来予測がどのように変化するかも考察しています．独自に構成した数理モデルと実データを比較して詳細な分析を行っており，また，新聞の切り抜きなどを用いて社会的背景の説明も加えていて，高校生の研究としては非常に水準の高いものでした．なお，本研究では，2010 年に石井晃氏が導入したヒット現象モデルを用いた塾生数の変動予測についても述べていますが，それについては割愛します．

♦ ここでは詳しく紹介できませんでしたが，奨励賞を受賞した「実現可能な錯視立体 $\cdots$」は，見る方向によって全く異なる図柄が現れる立体をコンピュータ上で作成したものです．この立体は，立方体を 3 方向からくり抜いて作られています．また，「待ち行列を用いたエスカレータ $\cdots$」は，エスカレーターの片側を歩く人用に空ける乗り方と両側に並んで立つ乗り方で，どちらが効率が良いかを待ち行列の理論を用いた数理モデルによって考察したものです．いずれも，なかなかの力作でした．

2　2022年度のプログラム

2022年度は10月8日（土），9日（日）に開催しました．前年度と同様,「スポーツの日」の前の2日間です．第1部の現象数理学入門講座の講師と講座のタイトルは次の通りです．

- 「無次元量を意識して世の中を見る」（矢崎成俊）
  - ◇ 1回目 鯨のように大きな鳥はなぜいないか？（土曜午後）
  - ◇ 2回目 感染症の結末を予測できるか？（日曜午前）
- 「『見る』仕組みを数理で探る」（杉原厚吉）
  - ◇ 1回目 動きの知覚と浮遊する静止図形（土曜午後）
  - ◇ 2回目 奥行きの知覚と変身する立体（日曜午前）

詳細は，次のURLをご覧ください．

http : //www.mims.meiji.ac.jp/seminars/another/2022/20221008-9.html

第2部の高校生による研究発表会は日曜日の午後に開きました．29件の応募がありましたが，最終的に研究成果を提出したのは23件でした．前年度に引き続き，今回も意欲的な研究が多く見られました．受賞研究は次の通りです（高校名のみ記載）．

【優秀賞】（2件）

- 「ツキノワグマの出没の増減と大量出没についての考察」

  （神戸大学附属中等教育学校1名）
- 「客を待たせない料理配達アルゴリズムの開発と検証」

  （広島大学附属高等学校3名）

【奨励賞】（3件）

- 「降水確率何パーセントから傘を持っていくべきか」

  （愛媛県立宇和島東高等学校4名）
- 「泳ぐ人工イクラの容器の影響」（茨城県立日立北高等学校4名）
- 「実現可能な多視点ワイヤーアートの作成」（広尾学園高等学校2名）

以下に受賞研究の内容を簡単に紹介します．スペースの制約上，一部の紹介にとどめます．詳細は上のURLをご覧ください．

♦「ツキノワグマの出没の増減···」は，近年，全国でクマの人里への出没が頻繁になり，多くの問題を引き起こしている状況を背景に行った研究です．クマの出没件数が多くの府県において2〜3年のスパンで増減を繰り返していることに注目し，その増減の繰り返しの理由を分析しています．森林総合研究所や環境庁が発表している統計データをはじめ，さまざまな資料を詳細に分析し，複数の仮説を立てて，それらの仮説の妥当性を検証しています．基本的にはデータ解析に分類される内容ですが，詳細な実データを基に考察を進める論理展開の緻密さは大変立派なものでした．

♦「客を待たせない料理配達アルゴリズム···」は，コロナ禍で料理の宅配サービスが急増した社会状況を反映したタイムリーな研究です．どのようなアルゴリズムを使って配送するのが効率がよいかを探るのが目的で，「クラスタリング法」と「焼きなまし法」の2つのアルゴリズムを比較し，最終的にクラスタリング法が優れていると結論しています．図3に，本研究で用いられているクラスタリング法による配送方法のイメージを示しました．．数学的にも高い水準の理論分析が行われており，極めて興味深い内容でした．

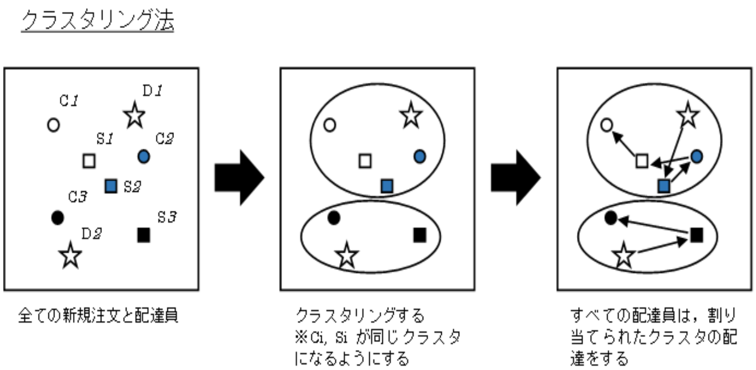

図3: クラスタリング法による配送方法のイメージ（受賞者の発表研究より抜粋）

♦「降水確率何パーセントから···」は，天気予報で発表される降水確率と実際の降水率を比較した研究です．詳しいデータが残っている2006年以降の東京都のデータを季節ごとに詳しく分析し，天気予報の降水確率と実際の降水率の間に，降水確率60%前後を境にして逆向きのズレが生じることを発見しています（図4）．季節によってズレの大きさは異なりますが，ズレをプロットすると，興味深いS字カーブが浮かび上がります．このようなS字カーブの存在は，審査員の我々も全く予想していませんでした．この研究の発表者は，上の事実から，天気予報で発表される降水確率が何パーセントぐらいなら

傘をもっていくべきか，という議論を展開していますが，この S 字カーブが現れる理由について，さらに掘り下げて考えれば，他にも面白いものが見えてくるかもしれないという印象を持ちました．

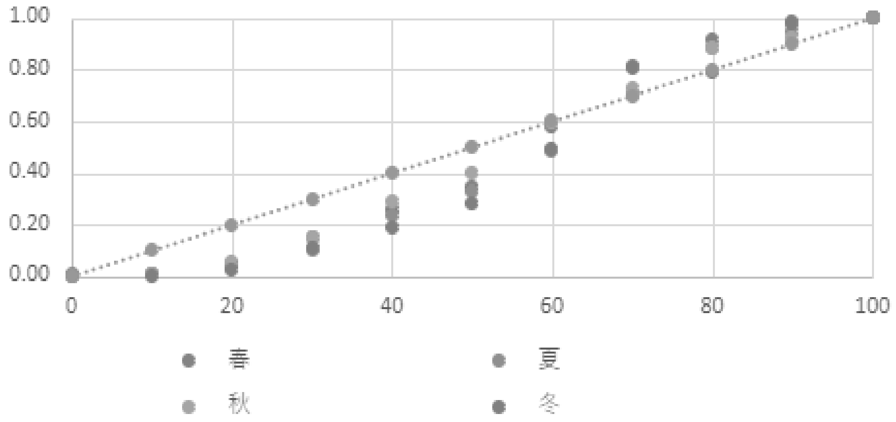

図 4: 天気予報の降水確率（点線）と実際の降水率の比較 （受賞研究より抜粋）

3　付録： Buffon の問題 — 公式 (1) の証明

本稿の最後に，公式 (1) の証明を与えておきます．実は，針の場合の結果を知っていれば，それを凸図形に一般化するのは驚くほど簡単ですが，この公式を知らない人も存外多いようですので，参考のために解説することにしました．

まず，古典的な Buffon の針の問題とは，水平な面上に等間隔 d で並んだ平行線族の上に長さ ℓ の針をランダムに落とすとき，針が平行線と交わる確率を求める問題です．よく知られているように答は

$$P = \frac{2\ell}{\pi d} \tag{2}$$

です．これを凸図形に拡張した公式 (1) を，あらためて述べ直しておきます．

K を 2 次元の凸図形とし，その周長を $L(K)$，最大直径を $diam(K)$ とする．今，水平な面上に等間隔 d で無数の平行線が引かれているとして，その上に図形 K をランダムな位置と角度で落とすとき，$diam(K) < d$ であれば，K が平行線と交わる確率 $P(K)$ は次式で与えられる．

$$P(K) = \frac{L(K)}{\pi d} \tag{$*$}$$

【公式 $(*)$ の証明】 K が凸 n 角形（$n \geq 3$）の場合について証明する．（一般の凸図形の場合は，多角形の結果に極限論法を適用すればよい．）n に関する数学的帰納法を用いる．

$n = 3$ の場合

K は三角形なので，$\triangle$ABC と表す．最大直径が d より小さいから，2 本の平行線と同時に交わることはない．また，$\triangle$ABC が平行線と交わる場合，必ず 2 辺で交わり，3 辺で交わったり 1 辺だけで交わることはない（図 5 左）．ただし三角形の頂点が平行線上にある場合は，確率ゼロなので除外して考える．$\triangle$ABC が辺 CA,AB で平行線と交わる事象，辺 AB,BC で交わる事象，および辺 BC,CA で交わる事象は互いに排反事象ゆえ

$$P(\triangle \mathrm{ABC}) = P_{\mathrm{CA,AB}} + P_{\mathrm{AB,BC}} + P_{\mathrm{BC,CA}}.$$

また，各辺は単独で平行線と交わることはないので，次式が成り立つ．

$$P_{\mathrm{AB}} = P_{\mathrm{CA,AB}} + P_{\mathrm{AB,BC}}, \quad P_{\mathrm{BC}} = P_{\mathrm{AB,BC}} + P_{\mathrm{BC,CA}}, \quad P_{\mathrm{CA}} = P_{\mathrm{BC,CA}} + P_{\mathrm{CA,AB}}$$

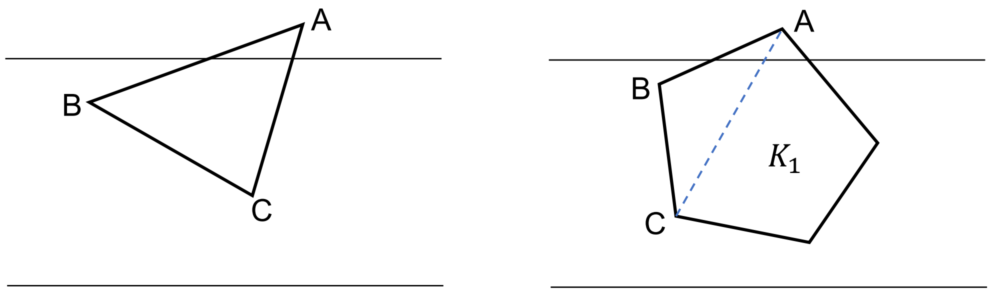

図 5: 凸多角形が平行線と交わる場合の概念図

上の 2 式より $P(\triangle \mathrm{ABC}) = \frac{1}{2}\left(P_{\mathrm{AB}} + P_{\mathrm{BC}} + P_{\mathrm{CA}}\right)$．また，古典的な Buffon の針の結果 (2) から，次式が成り立つ．

$$P_{\mathrm{AB}} = \frac{2\mathrm{AB}}{\pi d}, \quad P_{\mathrm{BC}} = \frac{2\mathrm{BC}}{\pi d}, \quad P_{\mathrm{CA}} = \frac{2\mathrm{CA}}{\pi d}.$$

これと先ほどの式から，次式が得られる．

$$P(\triangle \mathrm{ABC}) = \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA}}{\pi d} = \frac{L(\triangle \mathrm{ABC})}{\pi d}.$$

よって $n = 3$ の場合に $(*)$ が成り立つことが示された．

$n - 1$ まで公式は正しいと仮定し，$n \geq 4$ の場合

多角形 K の隣り合う 3 頂点を適当に選んで $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ とおき，K から $\triangle\mathrm{ABC}$ を切り取って得られる $n-1$ 角形を K_1 とする（図 5 右）．このとき，K が平行線と交わる事象は，$\triangle\mathrm{ABC}$ と K_1 の少なくとも一方が平行線と交わる事象に他ならない．また，$\triangle\mathrm{ABC}$ と K_1 の両方が同時に平行線と交わる事象は，線分 CA が平行線と交わる事象に他ならない．以上より，

$$P(K) = P(\triangle\mathrm{ABC}) + P(K_1) - P_{AB}.$$

しかるに，$n = 3$ の場合の結果と帰納法の仮定，および線分の場合の古典的結果 (2) より，

$$P(\triangle\mathrm{ABC}) = \frac{L(\triangle\mathrm{ABC})}{\pi d}, \quad P(K_1) = \frac{L(K_1)}{\pi d}, \quad P_{\mathrm{AB}} = \frac{2\mathrm{AB}}{\pi d}.$$

これと先ほどの式より，

$$P(K) = \frac{L(\triangle\mathrm{ABC}) + L(K_1) - 2\mathrm{AB}}{\pi d} = \frac{L(K)}{\pi d}.$$

よって凸 n 角形の場合にも $(*)$ が成り立つ．数学的帰納法により，任意の凸多角形に対して $(*)$ が成り立つことが示された．（証明終わり）

注． K が長さ ℓ の線分の場合は，公式 (2) で示したように，K が平行線と交わる確率は $P = \frac{2\ell}{\pi d}$ です（Buffon, 1777）．上の証明の中でもこの事実を用いました．この式は，一見 $(*)$ と異なるように見えますが，長さ ℓ の線分をペシャンコな凸図形と考えれば，その「周長」は線分の周りを一周して測るので $L(K) = 2\ell$ となり，両者は一致します．

◎<u>おわりに</u>

以上が，2021 年度と 2022 年度の「高校生のための現象数理学入門講座と研究発表会」の開催報告です．本稿では受賞研究の一部の内容しか紹介できませんでしたが，他にも意欲的な研究が少なからずあり，高校生の皆さんが実に多様なテーマに取り組んでいて，しかも非常に水準の高い研究も数多く見られたことに驚きました．今回の研究に傾けた情熱を今後も持続して，さらに力を伸ばしていってほしいと願っています．

（文責：明治大学先端数理科学インスティテュート所長　保野　博）