授賞報告
2022年度日本数学会代数学賞

2022 年度日本数学会代数学賞は，藤野修氏（京都大学大学院理学研究科），古澤昌秋氏（大阪市立大学大学院理学研究科），毛利出氏（静岡大学大学院総合科学技術研究科）が受賞されました．

藤野修氏「小平消滅定理の一般化と双有理幾何への応用」

藤野修氏は双有理幾何学，中でも主に極小モデル理論を中心に研究しているが，解析的手法を用いたり，トーリック幾何学の研究も行うなど，幅広く研究を行ってきた．

20 世紀前半までの曲面双有理分類論の基礎になっていた極小モデル理論（の原型）では (-1) 曲線と呼ばれる例外曲線を見つけるのに場合分けによる複雑な議論を用いていて高次元化は困難であった．それが 1980 年代に，森重文による端射線の発見を契機に，X. Benveniste，川又雄二郎，J. Kollár，宮岡洋一，M. Reid，V. V. Shokurov 等の人々の貢献により，極小モデル理論の (幾つかの基本定理からなる) 枠組みは一般次元で整備された．極小モデル理論は森，川又，宮岡等による 3 次元の場合の確立，Kollár 等によるその後の log 極小モデル理論を含めて Shokurov の哲学に沿って発展してきたが，その技術的な核は，広中特異点解消と共に，小平消滅定理の一般化である川又・Viehweg 消滅定理であった．また，極小モデル理論で重要な川又対数端末 (klt) 特異点という概念があるが，それは川又・Viehweg 消滅定理がうまく適用出来るぎりぎりの特異点と言える．因みに何れの消滅定理も，非特異複素射影多様体 X の Hodge スペクトル系列

$$E_1^{pq} = H^q(X, \Omega_X^p) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{C})$$

が E_1 退化することから従う点で，klt 特異点の極小モデル理論は純 Hodge 構造を基にしている．

藤野氏は，混合 Hodge 理論のスペクトル系列を考えることにより極小モデル理論を「混合化」出来るのではないかと考えた．様々な試行錯誤の結果，D を X 上の単純正規交叉因子とすると，スペクトル系列

$$E_1^{pq} = H^q(X, \Omega_X^p(\log D)(-D)) \Rightarrow H_c^{p+q}(X \setminus D, \mathbb{C})$$

の E_1 退化が正しい研究対象であることを発見した．彼は，コンパクト台コホモロジーに入る混合 Hodge 構造を用いることにより極小モデル理論を『混合』化することが可能で，この混合化によって高次元代数多様体の対数標準 (lc) 特異点に消滅定理を適用する

際の制約がなくなる，と見抜いたのである．これが 2006 年から 2007 年にかけての藤野氏の考察と聞いている [F2017, 1.5–1.7]．

因みに同じ頃，C. Birkar，P. Cascini，Hacon，McKernan による論文 [BCHM] は klt 特異点の範囲でフリップの終止定理等を証明することで，極小モデル理論を多くの重要な場合に確立し，幾つかの重要な問題の解決に応用した．それにより極小モデル理論は，双有理幾何学の中心的な道具として大きく発展し広く普及している．

藤野氏は，その展開に鑑みて，lc 特異点を含めた極小モデル理論の枠組みを整備する必要性を感じたようだ．結局，消滅定理レベルからの「混合化」を目指した藤野氏は 10 年間ほど単独で理論を発展させることとなった．

余談だが，ここで大学院時代に藤野氏の指導教員だった森重文氏のことばを引用しておく．「彼が独自の感性を大事にして研究していたのを思い出した．修士時代に半対数標準 (slc) 極小曲面のアバンダンス予想の論文を読んだ時に抱いた違和感を基に，その結果を 3 次元化するのに成功した [F2000]．今回はさらに，流行を追わない，研究者としての芯の強さも改めて感じた．」

話を戻すと, 藤野氏はアイデアを着実に実現していった．F. Ambro が提唱した quasi-log variety の理論に厳密な基礎付けを与えて確立した [F2011a, F2017]．更に E. Bierstone–P. D. Milman による広中特異点解消の精密化も用いて，lc 特異点ばかりでなく，slc 特異点をも含んだ形で極小モデル理論の枠組みを拡張した [F2011b, F2014]．例えば，高々 slc 特異点しか持たない射影多様体 X とその上の豊富な直線束 $\mathcal{L}$ に対して，小平消滅定理の slc 版 [F2014, Theorem 1.8] が証明された．

$$H^i(X, \omega_X \otimes \mathcal{L}) = 0 \qquad (i > 0)$$

この小平消滅定理は X が slc という仮定を弱めると反例 [F2017, 5.9.5 (Sommese)] がある．枠組みの基本定理も，[F2017, 5.9 Examples] 等を見ると，仮定をぎりぎりまで弱めてあることがわかる．

藤野氏はさらに，藤澤太郎氏と共同で，混合 Hodge 構造の変動の理論も研究し高次元代数多様体論で非常に重要な半正値性定理の強力な一般化も確立した [FF2014]．その威力を発揮したのが，安定多様体のモジュライ空間の射影性に関する [F2018] である．種数 2 以上の代数曲線のモジュライ空間のコンパクト化のために導入されたのが，安定曲線という，高々ノードしか持たず標準束が豊富な（可約かもしれない）代数曲線であった．その高次元版である安定多様体は，等次元で高々 slc 特異点しか持たず（多重）標準束が豊富な（可約かも知れない）射影多様体として導入された．極小モデル理論により，安定多様体のモジュライ空間が構成されている．モジュライ空間がコンパクトな代数空間であることは既知であったが，射影的かどうかが未解決であった．その射影性を，Kollár

の射影性判定法を用いて，完全に解決したのが [F2018] である．

以上で，藤野氏が注力してきた，混合 Hodge 理論を用いた小平消滅定理の一般化とその応用について述べたが，それ以外の業績についても少しだけ触れよう．論文 [FM2000] は楕円曲面に対する小平の標準束公式を一般化した．この新しい標準束公式は当初の想定以上に有効であり，高次元代数多様体論で不可欠のものになっている．例えば，[BCHM] で確立された，射影多様体の標準環の有限生成性の証明では，一般型の場合に帰着するための道具として使用されている．また一般ファイバーが K3 曲面やアーベル多様体などの場合に氏は標準束公式を精密化した．

藤野氏はトーリック幾何学においても多くの業績を上げている．例えば，トーリック多様体上の消滅定理については，任意標数において，秋月・中野型，小平型，川又・Viehweg 型など様々な形の結果が，V. I. Danilov 等により得られていたが，氏はトーリック多様体の倍数写像を用いてそれらを含む包括的な結果を得た [F2007]．そのアイデアの簡明さと結果の強力さは印象的で，コロンブスの卵を見せられたような気分にさせる．

このように，氏は独自の視点から高い業績を上げているが，同時に，若手研究者の育成にも熱心である．双有理幾何学に対して，これからも幅広い貢献が期待される藤野修氏は，代数学賞に相応しい研究者である．

藤野修氏の出版物リスト（抜粋）

[F2000] Abundance theorem for semi log canonical threefolds, Duke Math. J. **102** (2000), no. 3, 513–532.

[FM2000] (with Shigefumi Mori) A canonical bundle formula, J. Differential Geom. **56** (2000), no. 1, 167–188.

[F2007] Multiplication maps and vanishing theorems for toric varieties, Math. Z. **257** (2007), no. 3, 631–641.

[F2011a] Introduction to the theory of quasi-log varieties, Classification of algebraic varieties, 289–303, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2011.

[F2011b] Fundamental theorems for the log minimal model program, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **47** (2011), no. 3, 727–789.

[F2014] Fundamental theorems for semi log canonical pairs, Algebr. Geom. **1** (2014), no. 2, 194–228.

[FF2014] (with Taro Fujisawa) Variations of mixed Hodge structure and semipositivity theorems, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **50** (2014), no. 4, 589–661.

[F2017] Foundations of the minimal model program, MSJ Memoirs, **35**. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2017.

[F2018] Semipositivity theorems for moduli problems, Ann. of Math. (2) **187** (2018), no. 3, 639–665.

* * * * * *

古澤昌秋氏「保型 L 函数の特殊値と周期に関する研究」

古澤昌秋氏は保型表現論において顕著な業績をあげている．古澤氏の保型表現論における業績は多岐にわたるが，その中でも保型的 L 函数と周期に関する近年の業績はとくに優れたものである．

古澤氏は神戸大学の森本和輝氏との共同研究で 2 次の Siegel 保型形式に関する Böcherer 予想を精密な形で解決して多くの研究者の注目を集めた．Böcherer 予想とは以下のようなものである．

$$\Phi(Z) = \sum_T a(T,\Phi)\exp(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(TZ)), \qquad Z \in \mathfrak{H}_2$$

を重さ k の 2 次の Siegel カスプ形式で，Hecke 作用素の同時固有形式であるとする．ここで $\mathfrak{H}_2$ は 2 次の Siegel 上半平面で，T は 2 次の正定値半整数対称行列全体を走る．Fourier 係数 $a(T,\Phi)$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ の作用による同値類のみで決まる．

E を判別式 $-D_E$ の虚 2 次体，h_E を E の類数，$H(D_E)$ を行列式が $D_E/4$ の正定値半整数対称行列全体とする．このとき，$H(D_E)$ の元は局所的にはすべて同型だが，$\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ の作用によって h_E 個の同値類に分かれる．一変数の保型形式の場合，正規化された Hecke 同時固有形式の Fourier 係数は局所的に定義される佐武パラメーターを用いて表すことができるが，2 次の Siegel 保型形式の Fourier 係数 $a(T,\Phi)$ は $H(D_E)$ に含まれる T の同値類によって異なる値を取ることがあるため，局所的な不変量だけで表すことはできない．そこで Böcherer は Fourier 係数 $a(T,\Phi)$ の T の同値類に関する和を取ることを考え，

$$B(\Phi;E) = \frac{1}{w(E)} \sum_{T:H(D_E)/\sim} a(T.\Phi)$$

と定義した．ここで $w(E)$ は E の単数群の位数で，T は $H(D_E)$ に含まれる同値類の代表元を走る．このとき，Böcherer は

$$|B(\Phi;E)|^2 = c_\Phi \cdot D_E^{k-1} \cdot L(1/2, \Pi(\Phi)\times\chi_E) \qquad (c_\Phi \text{ は } \Phi \text{ のみに依存する定数})$$

という関係式が成り立つと予想した．ここで χ_E は E に対応する Dirichlet 指標で，$L(s,\Pi(\Phi)\times\chi_E)$ は Φ のスピノル L 函数を χ_E でツイストしたものである．この Böcherer 予想は 1986 年頃プレプリントとして流布され，Φ の Fourier 係数と $L(s,\Pi(\Phi)\times\chi_E)$ の中心特殊値との関係を与えるものとして多くの研究者の関心を集めたが，その解決は難しく，長きにわたって未解決のままであった．古澤氏は保型表現・保型的 L 函数の研究を進めるうちに Böcherer 予想に注目し，古澤氏の指導教員であった Shalika 教授とともに長年にわたってその証明に向かって研究を重ねてきた．

古澤氏は Shalika 教授が亡くなった後も Böcherer 予想の解決に向けて研究を続けてきたが，近年になって新たな展開があった．2 次のシンプレクティック群 Sp_2 は 5 次の直交群と同種なので 2 次の Siegel 保型形式は 5 次の直交群上の保型形式と考えることもできる．このように考えたとき，Böcherer 予想に現れる $B(\Phi;E)$ は 5 次の直交群上の保型形式の特殊 Bessel 型の周期と呼ばれるものととらえることができる．直交群上の保型形式の周期に関しては市野・池田予想，Gan–Gross–Prasad 予想などの予想があったが，2016 年頃 Liu はこれらの予想を参考にして Bessel 型の周期に関する精密な予想を定式化した．古澤氏は森本氏との共同研究において，テータ対応，局所安定積分などの道具立てを駆使することにより Liu の予想を $\mathrm{SO}(2n+1)\times\mathrm{SO}(2)$ の特殊 Bessel 周期に対して証明した．この結果は $n=2$ の場合，Böcherer 予想を含む．これにより古澤氏の長年の努力はついに実を結び，Böcherer 予想は

$$\frac{|B(\Phi;E)|^2}{\langle\Phi,\Phi\rangle}=2^{2k-4}\cdot D_E^{k-1}\cdot\frac{L(1/2,\Pi(\Phi))\,L(1/2,\Pi(\Phi)\times\chi_E)}{L(1,\Pi(\Phi),\mathrm{Ad})}$$

という精密化された形で証明された．ここで $\langle\Phi,\Phi\rangle$ は Φ の Petersson ノルム，$L(s,\Pi(\Phi))$ は Φ のスピノル L 函数，$L(s,\Pi(\Phi),\mathrm{Ad})$ は Φ の随伴 L 函数を表す．

このように古澤氏は Siegel 保型形式に関する大きな未解決問題であった Böcherer 予想を長年の努力により解決し，保型 L 函数の特殊値と周期の理論に大きな足跡を残した．古澤氏の研究は非常に重要で興味深いものであり，代数学賞にふさわしいものである．

＊　＊　＊　＊　＊　＊

毛利出氏「Artin–Schelter 正則代数の分類とその表現論への応用」

毛利氏の研究分野は非可換代数幾何である. これは Michael Artin により提出された二つの問題, AS(=Artin–Schelter) 正則代数の分類問題と非可換射影曲面の分類問題を中心に発展した分野であり, 通常の代数幾何学の手法や発想を活かして（非可換）代数やその加群圏, 導来圏を研究する分野である. 世界各国に相当数の研究者を有し, 毎年のように国際研究集会が開催される活発な分野でもある.

以下, 毛利氏の研究成果をいくつか紹介する.

(1) 可換環の中で最も基本的な正則局所環は, Auslander–Buchsbaum–Serre の定理により, 大域次元の有限性というホモロジー代数的性質により特徴付けられる. しかし非可換環に対しては大域次元の有限性は十分に強い条件ではなく, 何らかの付随条件を課すことが常である. 中でも Calabi–Yau 代数とその dg 代数版は, 圏論的代数幾何学や団代数の圏化で盛んに研究されている重要な対象である. 1987 年に Artin–Schelter により導入された AS 正則代数は Calabi–Yau 代数の前身と言え, 量子逆散乱法で導入された Sklyanin 代数や, Yang–Mills 方程式から得られる Yang–Mills 代数など多くの重要な例を持つ. 1990 年に Artin–Tate–Van den Bergh は, 3 次元 AS 正則代数に対して代数多様体と自己同型・可逆層からなる 3 つ組を定め, それから元の AS 正則代数を復元することにより, 3 次元 AS 正則代数の分類を代数幾何の問題に帰着した. 毛利氏の研究グループは先行研究を遥かに精密化して, 3 次元 AS 正則代数の同型類の関係式による分類を大きく前進させた. 毛利氏は S. Paul Smith 氏, 上山健太氏と共同で, Calabi–Yau 性を持つ 3 次元 AS 正則代数の関係式を決定した. 持たない場合の分類は, 板場綾子氏, 松野仁樹氏ら毛利氏の学生・ポスドクに引き継がれ, 最近の松野氏の論文で関係式が 2 次の場合の分類が完了した.

(2) 代数 A 上の両側加群の複体で, テンソル積関手が導来圏の同値を与えるものを（両側）傾複体と呼ぶ. これを代数多様体上の直線束のテンソル積関手の類似物とみなすことにより, 源泰幸氏は有限次元代数 A 上の傾複体に対して豊富性の概念を導入した. 特に, 反標準束の非可換類似物である逆 Serre 関手を与える傾複体が豊富である有限次元代数を, Fano 代数と呼ぶ. 毛利氏は源氏と共同で, AS 正則代数の 0 次部分が体であるという従来の仮定を落として, Fano 代数と AS 正則代数の間に対応を構成した（源–毛利対応）. 特に重要な場合は, d 次元 Fano 代数 A と, a 不変量が -1 の $d+1$ 次元 Calabi–Yau 代数 B の一対一対応として理解される. 傾複体の豊富性の一般論から, B に付随する非可換射影スキームと Fano 代数 A の導来圏同値が得られるが, これは Beilinson による射影空間と有限次元代数の導来圏同値の遥かな拡張である. A から B を構成する操作は, 同時期に Keller が dg 代数に対して与えた Calabi–Yau 完備化の特別な場合であり, 代数多様体から標準束の全空間をとる操作の非可換類似である. 1 次元 Fano 代数と 2 次元 Calabi–Yau 代数は, それぞれ non-Dynkin 型の箙の道代数と前射影代数という表現論における古典的対象であり, 一般の d 次元 Fano 代数と $d+1$ 次元 Calabi–Yau 代数は高次元 Auslander–Reiten 理論で重要な役割を果たす. このように源-毛利対応は非可換代数幾何と表現論に新たな架け橋を築くことにより, 大きなインパクトを与えた.

(3) Cohen–Macaulay 加群は可換環論, 代数幾何学における基本概念であり, その表現論は Auslander–Reiten, 吉野雄二らにより確立された. Gorenstein 環上の Cohen–Macaulay 加群のなす Frobenius 圏は, Buchweitz, Orlov の導入した特異圏と呼ばれる導来圏の

Verdier 商を増強するものとして重要性が広く認識されている．一般に特異圏の構造は極めて複雑だが, 特定の次数付き Gorenstein 環の次数付き特異圏に対しては, 傾理論によって有限次元代数の導来圏としての明快な記述が与えられる．例えば 2 次元単純特異点の次数付き特異圏は, 対応する Dynkin 箙の道代数の導来圏と同値であり（Geigle–Lenzing, 梶浦宏成–齋藤恭司–高橋篤史）, また Gorenstein 孤立商特異点の次数付き特異圏は, ある有限次元代数の導来圏と同値である（伊山修–高橋亮）．毛利氏は上山氏との一連の共同研究で, AS 正則代数を一般化した AS Gorenstein 代数と呼ばれる Gorenstein 環の非可換類似を扱い, 2 つの重要なクラスに対して, その特異圏とある有限次元代数の導来圏の間の同値を与えた．一つは AS 正則代数への有限群作用から定まる非可換商特異点であり, 伊山–高橋の手法の非可換版と Koszul 双対性を融合した．もう一つは特定の AS 正則代数の剰余環として得られる非可換 2 次超曲面特異点である．そこでは超曲面特異点に対する Eisenbud の行列因子化の手法, 特に Knörrer 周期性と呼ばれる 2 つの超曲面特異点の特異圏の間の同値を非可換へと拡張しており, これ自体が重要な成果である.

(4) 毛利氏の他の特筆すべき成果としては, Koszul 代数と Koszul 双対性に関するもの, 三角圏に対する Riemann–Roch 型定理, Smith 氏との量子射影空間束に関する共同研究, 特に交叉理論の確立が挙げられる．量子射影空間束の例としては量子線織曲面が挙げられるが, これは冒頭で述べた非可換射影曲面の分類に現れる重要なクラスである．最近ではこの成果を活かして, 植田一石氏, 大川新之介氏と共同で非可換 Hirzebruch 曲面のモジュライ空間を調べた.

毛利氏は日本における非可換代数幾何の第一人者として幾つもの重要な成果を挙げている．さらに氏は自身の研究を進める以外にも, 学生の育成や国際研究集会の定期的な主催により, 分野の普及・発展に貢献している．以上のように, 毛利氏の業績は非可換代数幾何と関連分野の発展に大きく寄与するものであり, 代数学賞に大変相応しいものである.

（代数学賞委員会委員長　並河良典　京都大学数理解析研究所）