書　評

数学原論

斎藤毅 著，東京大学出版会，2020 年

北海道大学大学院理学研究院
朝倉　政典

「ブルバキ：数学原論」といえば, おそらく数学研究に携わる人にとっては, 説明不要なくらいよく知られた数学書であろう．著者ニコラ・ブルバキは実在の数学者ではない．20 世紀のなかば，ヴェイユやカルタンを中心としたフランスの数学者集団が，あらゆる数学を基礎から書き上げるという壮大な目標を掲げ，その成果をニコラ・ブルバキという仮想数学者の名前で出版した．今回，斎藤毅氏によって同名の書籍が刊行された．斎藤氏の数学原論と区別するため，ブルバキによる数学原論をブルバキ原論と呼ぶことにしよう．斎藤氏の数学原論は, ブルバキ原論の解説書でもなければ圧縮版でもない．ブルバキ原論では扱いの小さかった圏論からの観点を取り入れており，また最終章に楕円曲線をもってくるなど，まったく新しい方針の下で書き起こされたオリジナルな数学書である．

ブルバキ原論が 20 世紀の数学に与えた影響は計り知れない（斎藤氏自身，高校生のときにブルバキ原論に触れたことで，その後の研究者人生に大きな影響を受けたそうである）．19 世紀までの数学はユークリッド幾何学など幾何的直観に依拠して作られることが多かったが，ブルバキはそのスタイルを徹底して排除，替わりに数学の基礎として採用したのは集合論であった．集合論を数学の共通言語として採用するという考えは，20 世紀に起こった数学のパラダイムシフトであり，ブルバキはその牽引役だったのである．一方，ブルバキ原論が書かれた時期は，カルタン，セール，グロタンディークらによって，圏と層の理論が，複素幾何学や代数幾何学に積極的に取り入れられていった時期でもある．爾来，圏と層は複素幾何学や代数幾何学を志す学生にとって必携の準備知識であるが，しかし，この圏と層がブルバキ原論で扱われることはなかった．初めて現れるのが，2016 年出版の「代数的位相幾何学」である．ブルバキが集合論を基礎として採用するきっかけのひとつに，リーマン面をいかに定義するか，という問題があったらしい．そんなブルバキが，最近になるまで圏と層を扱わなかったことは，考えてみれば，矛盾といえるかもしれない．

斎藤氏の数学原論では，ブルバキ原論のこの ‘矛盾’ を意識したのであろうか，第 1 章に圏と関手をもってきており，以降すべての章で，圏論の基本用語を積極的に用いた記述になっている．例えば，群の準同形写像を群の射，環の準同形写像のことを環の射と呼んでおり，どの章でも準同形写像という用語は現れない[1]．また，商体の定義を，通常

[1]準同形写像という用語を使わない理由は，本書の p.45 に書かれている．

であれば集合論的に要素 a/b の集合として与えるところを，本書では，体の圏から整域の圏への埋め込み関手の左随伴関手として定義している．このように，圏論を用いた記述・構成を優先させている点が，本書の特徴のひとつといえるだろう．もうひとつの大きな特徴は，最近の数学書としては大変めずらしいことであるが，代数・幾何・解析，すべての分野からの題材が一冊の本に盛り込まれていることである．各章の題目を並べてみよう．[第 1 章 圏と関手]，[第 2 章 環と加群]，[第 3 章 ガロワ理論]，[第 4 章 ホモロジー]，[第 5 章 微分形式]，[第 6 章 複素解析]，[第 7 章 層]，[第 8 章 曲面と多様体]，[第 9 章 リーマン面]，[第 10 章 楕円曲線]．これは，本書の目的が，数学は本来一つのものであり，さまざまな分野が交錯することで数学が作り上げられていることを伝えることだからである．そのための共通言語が圏と関手であり，また最終章に楕円曲線をもってきた理由でもある．数学は一つである，というのはブルバキの主張そのものであった．ブルバキ原論の原題名「Éléments de Mathématique」の Mathématique が単数形になっているのはそのためといわれる．数学に限らず，あらゆる科学分野において細分化・専門化のすすむこの時代に，本書は，数学の統合というブルバキの理想を追い求めた書であり，それが同じ表題をつけた理由なのである．

本書は全 10 章からなるが，すべての章をひとつひとつ解説するには紙幅が足りないので，一部だけを取り上げて解説したい．なお，内容の性質上，いくつかの専門用語を用いることになった．ご容赦いただきたい．

[第 3 章 ガロワ理論] 数学科の学生のみならず一般読者にも人気のガロワ理論（というよりガロワの人生？），一方，このガロワ理論を圏と関手の観点から論じたのは，グロタンディークが最初ではないかと思われる．彼によれば，体 k の絶対ガロワ群 G_k とは，有限次元分離的 k 代数の圏と有限 G_k 集合の圏との間の圏同値

$$\mathbf{Y} : (\mathbf{FEt}/k) \xrightarrow{\cong} (G_k\text{-sets})^{\mathrm{op}}, \quad \mathbf{Y}(A) = \mathrm{Hom}_k(A, \bar{k})$$

を与えるものとして特徴づけられる．グロタンディークはこの考えを一般化することで，代数的基本群（エタール基本群）の理論に到達したのだが，さすがにそこまで書いては本書のレベルを明らかに超える．しかし，第 3 章は，グロタンディークの圏同値を意識した構成となっており，そう思いながら読むと楽しさが倍増する．最後に，ガロワ理論の応用として，円分多項式の既約性を証明している．1 の原始 n 乗根 ζ_n に対し，

$$\Phi_n(x) = \prod_{1 \leqq k \leqq n,\, \gcd(n,k)=1} (x - \zeta_n^k)$$

を円分多項式という．$\Phi_n(x)$ が既約多項式であること（つまり有理数係数の多項式としてこれ以上因数分解できないこと）は，n が素数のときは，代数の演習授業でもおなじみのアイゼンシュタイン判定法を使えば容易に示せるが，一般の正整数 n となると，実はそんなに簡単ではない．いくつかの証明方法が知られているが，本書では，円分指標[2]

[2]しかし，本書中 “円分指標” という言葉は出てこない．

が全単射であることを示すことによって既約性を導いている．高度な定理を引用することなく，ガロワ理論（および代数の初歩）しか使わない自己完結した証明となっている．

[第 4 章 ホモロジー] オイラーの多面体定理に端を発する位相幾何学は，19 世紀のおわりごろ，ポワンカレによって発見されたホモロジーによって一気にブレイクする．ホモロジーは，微分積分の発見に匹敵する数学の大発見のひとつだろう．とはいえ，この精密機械のような理論（はじめての人にはそう見えるだろう）を，最初から厳密に展開するのは，大変に骨の折れる作業である．この章では，まず位相空間の基礎事項とホモロジー代数の最低限の知識（へびの図式，複体）を解説したあと，わずか 20 ページたらずで，ホモロジー群の定義，ホモトピー不変性と局所性そしてマイヤー・ヴィートリス完全列まで，ほぼ証明の省略なしで書き切っている．この章の内容は，以降の章（第 8 章 曲面と多様体，第 9 章 リーマン面，第 10 章 楕円曲線）で必要となるものばかり，というより，必要なものだけが書かれている，というべきであって，従って，ホモロジー理論では定番の，空間対の完全列やポワンカレ双対定理などは扱われていない．

[第 8 章 曲面と多様体, 第 9 章 リーマン面] この章で書かれている内容は，標準的な多様体論および代数曲線論の教科書に書かれていることである．いずれも，まじめに取り上げれば，半期分ないし一年分の授業時間を要するものであり，本にすれば一冊二冊分が必要な内容である．第 8–9 章は，第 10 章のための準備という位置づけであり，そのために不必要なものは割愛されている，と思って読んだ方がいいだろう．いくつか特徴をあげれば，第 8 章では，有向曲面の基本類について詳しく解説しており，第 9 章では，平方根のリーマン面を導入している．これらは，第 10 章で楕円曲線の幾何的側面を展開する際に使われる．

[第 10 章 楕円曲線] 20 世紀の終わりにフェルマー予想解決という数学史に残る偉業が達成された．それは，有理数体上で定義された楕円曲線はモジュラーであるということを示すことによって成し遂げられた成果であった．現在でも，楕円曲線は整数論における主要な研究対象である．本書の最終章は，この楕円曲線についてである．この章において，代数・幾何・解析が結合する様子が展開される．前章まではこの章のための準備である，といっても過言ではない．前章までの内容について一定程度の知識を有する読者は，いきなりこの章から読み始め，必要に応じて前の章に戻るという読み方も可能である．

はじめての人に対して楕円曲線をどのように導入するか，という問題は，いつも頭を悩ませる問題である．本書では，楕円曲線を

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

という方程式のこととして導入し，その代数的側面を展開することから始める．最初に示すのは，この方程式が定めるアフィン環がデデキント環になるという定理である．ちなみに本書全体を通じてネーター環は出てこない．ヒルベルトの零点定理どころかネーター環の一般論すら仮定せずに，楕円曲線のアフィン環がデデキント環であること，す

なわち素イデアル分解の一意性を ‘最短で’ 証明してしまうのである．その切れ味の鋭さは，さすがであると言わざるをえない．デデキント環であることが証明できたので，イデアル類群（因子類群）が定義できる．楕円曲線の加法を定義し，因子類群との間の群同形（アーベルの定理）を導く．続いて，楕円曲線の同形類を定義し，同形類の不変量として j 不変量を導入する．楕円曲線の同形とはスキームとしての同形のことなのだが，スキーム論を仮定できないため，ここではアフィン環の同形をもって，同形の定義としている．以上ここまでが，楕円曲線の代数的な側面である．次は，幾何的側面である．第 9 章の結果を使えば, $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ の定める零点集合

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\} \cup \{\infty\}$$

がコンパクト・リーマン面になることが従う. 10.6–7 節では，そのホモロジー群を決定する．特に基本類の構成は，本書全体を通じてもっとも長く難解なものである．10.8–9 節で，解析的側面，すなわち楕円積分と楕円関数を導入し, 上記のコンパクト・リーマン面が複素トーラスであることを示して，ひとつの区切りとしている．歴史的には，楕円積分の研究を出発点として，楕円関数，複素トーラス，リーマン面そしてモジュラー形式へと研究が発展してきたわけだが，本書では楕円積分の解説を最後にもってきている．

以上，大雑把であるが，本書の概要を述べた．最後に注意点を述べると，本書は教科書的な役割を果たすことを目的に書かれた数学書ではない，ということである．序文でもコメントされているが，各章の内容を一通り展開するには本一冊分が必要となる．例えば，[第 2 章 環と加群] ではネーター環やテンソル積を扱っていない．従って，ヒルベルトの基底定理など，可換環論で定番となっている定理の多くが扱われていない．その他に，[第 7 章 層] では層コホモロジーを定義していないし，[第 9 章 リーマン面] ではリーマン・ロッホの定理が出てこない，など．従って，講義用の教科書やセミナーテキストとしては不向きかもしれない．しかしながら，最後の楕円曲線の章まで，すべての定理ないし命題に，ほとんど省略なし飛躍なしの証明が書かれている．従って，1 ページ目から読み通せば最後まで読み切ることが可能な構成になっている．そう，この本を読むのに数学的予備知識は要らない，ただ，若干の数学的推論の習慣と抽象能力が必要なだけだ！ [3]

評者自身は，本書を読んで興味深く，楽しませてもらった．おすすめは第 3 章ガロワ理論と第 10 章楕円曲線である．いずれも，通常の文献ではあまり見られない構成・内容となっており，新鮮な印象を受けた．みなさんにとってはいかがだろうか？

[3] ブルバキ原論・序文より．ただし，このあと “そうは言うものの・・・” という文が続くのだが．本書でも，予備知識として，線形代数等を仮定している．