前川泰則氏の第16回（令和元年度）日本学術振興会賞に寄せて

京都大学大学院人間・環境学研究科
清水　扇丈

前川泰則氏（京都大学大学院理学研究科教授）が第16回（令和元年度）日本学術振興会賞を受賞されました．受賞研究題目は「流体力学における境界層理論の数学的正当性の解明」です．2019年度日本数学会賞春季賞に引き続いてのご受賞に，心からお祝いを申し上げます．

前川氏の専門は流体力学と関連の深い偏微分方程式であり，実解析・関数解析的手法を用いて世界的に優れた成果を挙げてきました．流体力学と関連した方程式は多岐に渡りますが，前川氏の主な研究対象は非圧縮性粘性流体の運動を記述するNavier–Stokes方程式や，渦度場を記述する渦度方程式です．非圧縮性流体の運動は速度ベクトル場と圧力の挙動で記述されますが，それらが不規則に変動する流れを乱流といい，対比して規則性の強い流れを層流と言います．乱流は時間的にも空間的にも不規則に変化する流れで大小様々な渦から構成されていると考えられます．このような層流から乱流にいたるまでの流体の様々な運動を支配する基礎方程式がNavier–Stokes方程式であり，その「解の時間大域的一意存在と滑らかさ」はClay研究所ミレニアム問題の一つとして有名です．

さて，Reynolds数は流体力学において，慣性力（分子）と粘性力（分母）の比で表される基本的な無次元量です．Reynolds数が低い場合には粘性の減衰効果が強く流れは層流に保たれますが，高い場合には流れは乱流へと遷移します．身近な流体は動粘性係数が小さく，例えば20度の水で約$1.0 \times 10^{-6}\, m^2/s$であり，高Reynolds数の流体の解析は現実の流体運動を理解する上で重要です．数学的にはNavier–Stokes方程式の非粘性極限の解の漸近挙動の問題と定式化されますが，最高階微分の粘性項を消滅させることになるため，微分損失を伴う強い特異性の生じ得る特異極限問題であり，数学解析の立場から厳密な理論を構築することは一般に大きな困難を伴います．

少なくとも形式的には，Navier–Stokes方程式から粘性項を取り除いたEuler方程式によって非粘性極限が記述されることになりますが，とりわけ，流れの領域が境界を持ち，かつ速度場が粘着（no-slip，速度0）境界条件を満たす場合には，速度場が不連続的に振舞う境界付近の領域を制御しなければなりません．物理学者Prandtlは20世紀初頭に、粘性の小さい流体ではその影響が境界層と呼ばれる物体表面付近に限られることに注目し，境界層を記述するPrandtl方程式を導出しました．粘性が小さいときに

$$\text{Euler 方程式の解} + \text{Plandtl 方程式の解} + \text{剰余項} \tag{1}$$

の形でNavier–Stokes方程式の解を構成することができれば，非粘性極限を求めることができます．(1)はPrandtl境界層展開と呼ばれますが，その数学的正当化は困難を極め

ていました．境界層は高周波数領域において強い不安定性を持つことが示唆されており，そのため，十分広いクラスの初期値に対して粘性流体の非粘性極限が数学的にどのように記述されるかという問題は，2 次元半空間のような単純化された状況下においても未解決でした．境界層の出現は渦度場の言葉で表現すれば境界付近における渦層の形成であり，流体力学的にも渦度場に着目して非粘性極限を考察することは自然です．しかしながら，速度場が粘着境界条件を満たす場合，渦度場は非局所的かつ非線形の境界条件を満たすことになり，この境界条件の不確定さ故に非粘性極限問題に際して渦度場を数学的に直接解析する試みはこれまでほぼ皆無でした．これは境界を有しない全空間や滑り（slip）境界条件の下での非粘性極限問題とは極めて対照的です．前川氏は [1] で，渦度方程式を用いて 2 次元半平面における非粘性極限問題を考察し，初期時刻において渦度の台が境界から十分離れて分布している場合に，非粘性極限における Prandtl 境界層展開が数学的に正当化されることを証明しました．証明の核となるアイデアは，境界上で生成される粘性流の渦度場と，境界から離れた場所に分布し Euler 流で輸送される渦度場の相互作用を見積もることであり，境界条件も含めた渦度方程式の解析の有効性が力量ある解析計算によって明らかにされています．

上述のように，粘着境界条件下での非粘性極限における Navier–Stokes 方程式の解の挙動は，形式的には Prandtl 境界層展開で記述されます．しかし，この境界層展開を導出する形式的議論においては解の滑らかさが仮定されており，厳密に正当化するためには少なくとも付与データに対する境界付近での解析的な正則性が要求されます．境界層として最も基本的な形状である単調で凸性を有する剪断型境界層周りにおいて，Gevrey 指数 3/2 クラスの初期値に対して Prandtl 境界層展開が正当化されることを，前川氏は Gerard–Varet，Masmoudi 両氏との共同研究 [2] によって証明しました．Gevrey 指数 σ クラスは C^∞ 級関数の部分空間であり，$\sigma = 1$ のときに解析的であり，σ が大きいほど広い関数空間となります．この結果は，解析的な正則性よりも真に弱い正則性の下で，摂動に対する特別な対称性を仮定することなく Prandtl 境界層展開を正当化した最初の結果であり，国内外のこの方面の研究者に大きな反響をもたらしました．特に，層流から乱流への遷移の誘因の一つと考えられる Tollmien–Schlichting 不安定性と境界層の形状および Gevrey 安定性との関わりを，Gevrey 指数 3/2 と結びつけた定理は，画期的な成果と言えます．

Tollmien–Schlichting 不安定性は時間依存特有の現象のため，定常問題での Prantl 境界層展開ではこのような障害が生じずに Sobolev クラスでの正当化が期待されます．これについて前川氏は，Gerard–Varet 氏との共同研究 [3] で肯定的な見解を与えました．単調な剪断型境界層周りでの定常問題に対して，[3] は Sobolev クラス（$H^1 = W^{1,2}$）の枠組みで Prandtl 境界層展開を正当化した最初の論文です．

なお，前川氏は最近でも境界層の数学解析において顕著な研究成果を挙げています．論

文 [2] で考察した境界層は剪断型という境界接方向の変数に依存しない特定のクラスに限られていました．そのため，一般の単調で凸性を有する境界層周りでの Prandtl 境界層展開の Gevrey 指数 3/2 のクラスでの正当化は重要な未解決問題として残されていました．前川氏は最近，Gerard–Varet，Masmoudi 両氏との共同研究でこの問題を解決する論文を発表しています [4]．そこでは重み付きエネルギー法にもとづく新しいアプローチが確立され，時空間すべての変数に依存した境界層周りで解の定量評価を与えることに成功しています．

以上の，一連の Gevrey クラスの推論を Plantl 境界層展開に応用し，画期的な結果を得ることができた理由の一つに，前川氏の学部時代の恩師で，超局所解析を専門とされる森本芳則氏（京都大学名誉教授）からのご教授と，日頃からの議論によるところが大きいのではないかと推測しています．

前川氏の研究は，境界層理論の数学的正当性の解明に加えて，乱流中の微細渦菅構造のモデルである Burgers 渦の数学解析や，2 次元の回転する物体周りの定常流の一意存在と漸近形の導出，船を典型的な障害物としてその周りを通り過ぎる流れに対し，物理的に適切な Navier–Stokes 方程式の 2 次元流の解の安定性の解明など，枚挙にいとまがないです．これらの研究成果は，純粋数学における近代解析の発展に留まらず，その卓越した数学解析的な手法を背景に，応用数学における方法論の基礎付けに多大な貢献をもたらしました．前川氏の今後益々のご発展を祈念致します．

[1] Maekawa, Y., *On the inviscid limit problem of the vorticity equations for viscous incompressible flows in the half plane*, Comm. Pure Appl. Math., **67** (2014) 1045-1128.

[2] Gerard-Varet, D., Maekawa, Y., and Masmoudi, N., *Gevrey stability of Prandtl expansions for 2D Navier-Stokes flows*, Duke Math. J., **167** (2018) 2531-2631.

[3] Gerard-Varet, D., and Maekawa, Y., *Sobolev stability of Prandtl expansions for the steady Navier-Stokes equations*, Arch. Ration. Mech. Anal., **233** (2019) 1319-1382.

[4] Gerard-Varet, D., Maekawa, Y., and Masmoudi, N., Optimal Prandtl expansion around concave boundary layer. Preprint. arXiv:2005.05022.